2017 경찰 1차(재시험) 수학 해설지

1번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 다항식
★ 난이도	하

★ 풀이

다항식을 전개했을 때 상수항을 포함한 모든 항의 계수들의 총합은 다항식에 $x=1$을 대입한 값과 같습니다.

$\therefore$ 1024

2번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 다항식 연산
★ 난이도	하

★ 개념

직육면체의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 할 때,

모서리의 합 = $4(a+b+c)$

겉넓이 = $2(ab+bc+ca)$

대각선의 길이 = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

위 내용은 다음 공식과 연관되어 많이 출제됩니다.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

★ 풀이

직육면체의 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면,

$$4(a+b+c)=36,\ a+b+c=9$$
$$2(ab+bc+ca)=56$$

입니다.

직육면체에서 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 이므로 다음의 식에 대입해서 대각선의 길이를 구할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= 9^2-56=25 \end{aligned}$$

$\therefore$ 대각선의 길이 = 5

3번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 나머지정리
★ 난이도	하

★ 풀이

다항식 $P(x)$를 $x^2-7x+12$로 나누었을 때의 나머지는 $2x+1$이므로

$$P(3)=7,\ P(4)=9$$

x^2+3x+2로 나누었을 때의 나머지는 $3x+2$이므로

$$P(-1)=-1,\ P(-2)=-4$$

입니다.

$P(x)$를 x^2-3x-4로 나눈 나머지를 $ax+b$라 하면,

$$P(4)=4a+b=9$$
$$P(-1)=-a+b=-1$$

이고 두 식에서 a, b를 구하면 $a=2$, $b=1$입니다.

$\therefore$ 나머지는 $2x+1$

4번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 다항식
★ 난이도	하

★ 풀이

α가 이차방정식의 근이므로 대입하면

$$\alpha^2-3\alpha+1=0$$

입니다. $\alpha \neq 0$이므로 양 변을 α로 나누면

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$$

입니다. 양 변을 제곱하면,

$$\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}+2=9$$

입니다.

$$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=7$$

5번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 복소수의 연산
★ 난이도	하

★ 개념

복소수 α, β에 대하여 그 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$라 할 때,

$$\overline{(\alpha+\beta)}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$$

가 성립합니다.

★ 풀이

$\alpha=2+3i$, $\beta=4-i$이므로

$$\alpha+\beta=6+2i$$

입니다.

주어진 식을 인수분해하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta&=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

$\alpha+\beta=6+2i$를 위의 식에 대입하면

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)}&=(6+2i)(6-2i)\\&=40\end{aligned}$$

$\therefore\ 40$

6번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 근과 계수와의 관계
★ 난이도	하

★ 개념

$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면, 다음의 식이 성립합니다.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a},\ |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

또한 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로, 양 변에 $x=1$, -1을 대입하면 다음의 식이 성립합니다.

$$a(1-\alpha)(1-\beta)=a+b+c$$

$$a(1+\alpha)(1+\beta)=a-b+c$$

★ 풀이

$x^2-3x-5=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=5$$

$$\alpha^2-3\alpha-5=0,\ \beta^2-3\beta-5=0$$

입니다.

주어진 식을 통분하면 다음과 같습니다.

$$\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

위의 식을 이용하여 분자/분모를 간단히 정리하면 다음과 같습니다.

1) 분자

$$\beta(\beta+1)=\beta^2+\beta=4\beta+5$$

$$\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha=4\alpha+5$$

$$\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)=4(\alpha+\beta)+10=22$$

2) 분모

$x^2-3x-5=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로 양 변에 $x=-1$을 대입하면,

$$(\alpha+1)(\beta+1)=-1$$

입니다.

$\therefore\ -22$

7번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 이차방정식
★ 난이도	하

★ 풀이

이차방정식이므로 $k \neq 0$이고, 실근을 가질 조건은 $D \geq 0$ 입니다.

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (3k+2)^2 - k(k^2+10k+8)\\ &= -k^3-k^2+4k+4\\ &= -k(k^2-4)-(k^2-4)\\ &= -(k+2)(k-2)(k+1) \geq 0\end{aligned}$$

$k \leq -2,\ -1 \leq k \leq 2$

$k \neq 0$이므로 만족하는 k는 다음과 같습니다.

$k \leq -2,\ -1 \leq k < 0,\ 0 < k \leq 2$

$\therefore$ k의 최댓값 = 2

8번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 이차방정식
★ 난이도	중

★ 풀이 1

$|x^2-2x-5| = k$ 가 서로 다른 4개의 실근을 가지려면,

$x^2-2x-5=k,\ x^2-2x-5=-k$

가 각각 2개의 실근을 가져야 합니다.

두 이차방정식의 판별식을 각각 $D_1,\ D_2$라 하면,

$D_1 = 1+5+k > 0,\ D_2 = 1+5-k > 0$

입니다.

이 때, $k>0$ 이므로 $0<k<6$ 입니다.

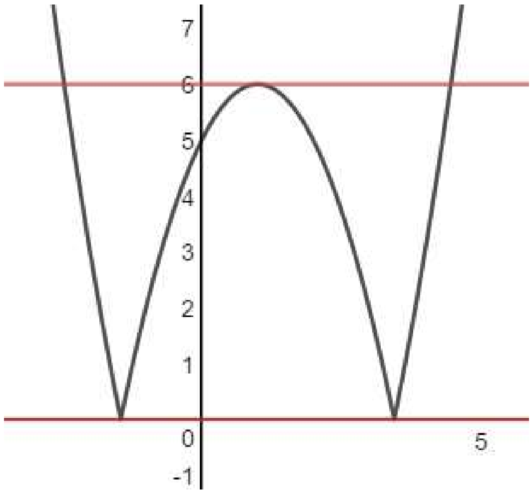
$\therefore$ 5개

★ 풀이 2

$|x^2-2x-5| = k$ 가 서로 다른 4개의 실근을 가지려면,

$y=|x^2-2x-5|$와 $y=k$

두 그래프가 4개의 점에서 만나야 합니다.



위 그래프를 보면 알 수 있듯 $k=0$일 때 아래 두 점에서 만나고, $k=6$일 때 위에서 세 점에서 만나므로 네 점에서 만나기 위한 k값의 범위는 $0<k<6$입니다.

$\therefore$ 5개

9번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 이차함수의 최대, 최소
★ 난이도	중

★ 풀이

$t=x^2-4x+1$로 치환하면, $0 \leq x \leq 3$의 범위에서 t의 범위는 다음과 같습니다.

$-3 \leq t \leq 1$

$t=x^2-4x+1$를 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned}y &= (x^2-4x+1)^2-4(x^2-4x)+1\\ &= t^2-4(t-1)+1\\ &= (t-2)^2+1 \quad (-3 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

축이 $-3 \leq t \leq 1$에 포함되지 않으므로

$t=-3$일 때 최댓값 = 26

$t=1$일 때 최솟값 = 2

$\therefore$ $M-m=24$

10번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학2] 함수
★ 난이도	중

★ 풀이

교점의 x좌표가 1이므로 $y=x^2+4x+5$에 대입하면

$A(1,\ 10)$

이고 이를 $y=2x+k$에 대입하면

$k=8$

입니다.

$y=x^2+4x+5$, $y=2x+8$을 연립하여 교점을 구하면,

$x^2+2x-3=0$

$x=-3,\ 1$

따라서 $B(-3,\ 2)$

$\therefore\ 8+2=10$

11번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 고차방정식
★ 난이도	중

★ 풀이

계수가 모두 실수이므로 i가 근이면 켤레복소수인 $-i$도 근입니다.

세 근을 i, $-i$, α라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여,

세 근의 곱 = $-2=i\times(-i)\times\alpha$

$\alpha=-2$

$p=i+(-i)+(-2)=-2$

$q=i\times(-i)+i\times(-2)+(-i)\times(-2)=1$

$\therefore\ pq=-2$

12번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 연립부등식
★ 난이도	중

★ 풀이

각각 부등식을 풀이하면 다음과 같습니다.

$|2x-7|<3$

$-3<2x-7<3$

$2<x<5$

$x^2+24\ge 10x$

$(x-4)(x-6)\ge 0$

$x\le 4,\ x\ge 6$

두 부등식의 공통부분은 $2<x\le 4$ 입니다.

만족하는 자연수는 3, 4이므로

$\therefore\ 3+4=7$

13번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 직선의 방정식
★ 난이도	상

★ 개념

두 직선에서 같은 거리에 떨어져 있는 점을 P라 할 때, P가 이루는 자취의방정식은 두 직선이 이루는 각의 이등분선입니다.

★ 풀이

각을 이등분하는 직선 위의 한 점을 $P(a,\ b)$라 하면

점 P에서 각 직선에 이르는 거리가 같습니다.

$$\frac{|a+3b+1|}{\sqrt{10}}=\frac{|3a-b+6|}{\sqrt{10}}$$

$|a+3b+1|=|3a-b+6|$

1) $a+3b+1=3a-b+6$

$2a-4b+5=0$

2) $a+3b+1=-(3a-b+6)$

$4a+2b+7=0$

y절편은 각각 $\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{2}$ 입니다.

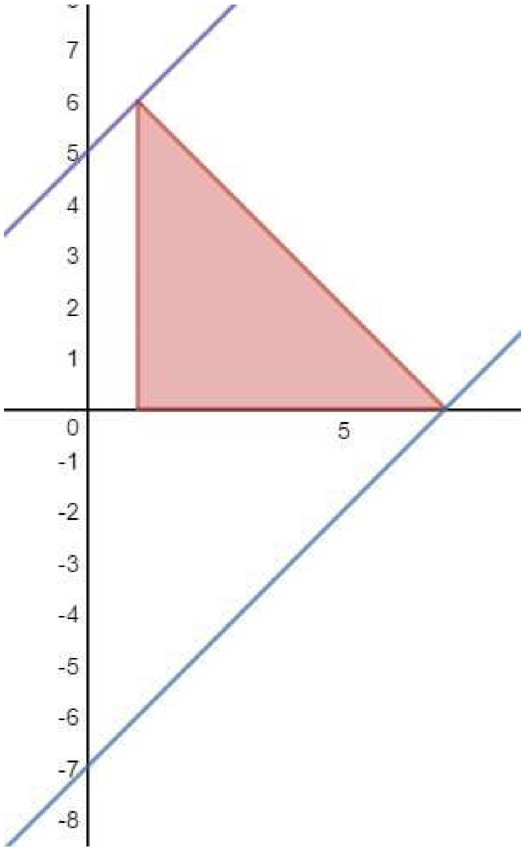
$\therefore$ y절편 사이의 거리 = $\frac{19}{4}$

14번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 부등식의 영역
★ 난이도	중

★ 풀이

세 부등식이 이루는 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같습니다.



$x-y=k$라 하면 $y=x-k$이므로 기울기가 1인 직선이 이 영역과 만나게 하는 k값의 범위는 다음과 같습니다.

$$-5 \leq k \leq 7$$

$\therefore$ k의 최댓값 = 7

15번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분] 함수의 극한
★ 난이도	하

★ 풀이

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \alpha$로 수렴한다고 하면,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty}(3f(x)-4g(x)) &= 3\lim_{x \to \infty} f(x) - 4\lim_{x \to \infty} g(x) \\ &= 3-4\alpha = 2\end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha = \frac{1}{4}$

16번

★ 정답	②
★ 출제영역	[미적분] 미분
★ 난이도	하

★ 풀이

$x=1$에서 접선의 기울기는 $f'(1)$입니다.

$f'(x) = 3x^2+4ax+5$ 이므로

$f'(1) = 3+4a+5 = 8+4a = -4$

$\therefore$ $a=-3$

따라서 접점은 $(1,\ f(1)) = (1,\ -4)$ 입니다.

접선 역시 이 점을 지나므로 대입하면

$-4 = -4+3b,\ b=0$

$\therefore$ $a+b=-3$

17번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분] 정적분
★ 난이도	하

★ 풀이

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2+7x)dx &= \int_{-a}^{a}3x^2dx \\ &= 2\int_{0}^{a}3x^2dx \\ &= 2a^3=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$a=\frac{1}{2}$이므로

$\therefore\ \ 10a=5$

18번

★ 정답	①
★ 출제영역	[확통] 확률
★ 난이도	중

★ 개념

두 사건 A, B가 독립사건이면 다음의 식이 성립합니다.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

★ 풀이

$P(A\cap B^c)=P(A-B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ 이므로

$P(B)=\frac{1}{2}$입니다.

두 사건 A, B가 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ 가 성립합니다.

$P(A\cap B)=k$라 하고 위의 식에 대입하면,

$$k=\left(\frac{1}{4}+k\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$입니다.

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

이므로

$\therefore P(A^c)=P(U)-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

19번

★ 정답	④
★ 출제영역	[확통] 이항분포
★ 난이도	중

★ 개념

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, $X=k$일 때의 확률은 다음과 같습니다.

$$P(X=k)={}_nC_k\,p^k(1-p)^{n-k}$$

★ 풀이

$$\begin{aligned}P(1\le X\le 3) &= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= {}_{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ &= \frac{175}{1024}\end{aligned}$$

$\therefore a+b=1199$

20번

★ 정답	②
★ 출제영역	[확통] 연속확률변수
★ 난이도	상

★ 개념

$[a,\ b]$에서 정의된 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여

전체 확률 = $1=\int_a^b f(x)dx$

평균 = $E(X)=\int_a^b xf(x)dx$

분산 = $V(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-m^2$

★ 풀이

구간 $[0,\ 3]$에서 정의된 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여

평균 = $\int_0^3 xf(x)dx=\frac{1}{4}$

분산 = $\int_0^3 x^2f(x)dx-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$\int_0^3 x^2f(x)dx=1$

전체 확률 = $\int_0^3 f(x)dx=1$

$$\int_0^3 (x^2+3ax+7)f(x)dx$$
$$=\int_0^3 x^2f(x)dx+3a\int_0^3 xf(x)dx+7\int_0^3 f(x)dx$$
$$=1+\frac{3a}{4}+7=11$$

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3=27$