

# 수학 영역(가형)

## 제 2 교시

1

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{3}$     ②  $\frac{2}{3}$     ③ 1    ④  $\frac{4}{3}$     ⑤  $\frac{5}{3}$

2. 함수  $y = 2\sin x + 1$ 의 최댓값은? [2점]

- ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4    ⑤ 5

3.  $\int_0^1 (e^x + 1)dx$ 의 값은? [2점]

- ①  $e-2$     ②  $e-1$     ③  $e$     ④  $e+1$     ⑤  $e+2$

4. 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 주축의 길이는? [3점]

- ① 2    ② 4    ③ 6    ④ 8    ⑤ 10

5. 함수  $f(x) = \cos x$ 에 대하여  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① -1      ②  $-\frac{1}{2}$       ③ 0      ④  $\frac{1}{2}$       ⑤ 1

6. 방정식  $\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x} = 2^{x+4}$ 을 만족시키는 실수  $x$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

7. 같은 종류의 컴퓨터용 사인펜 9자루를 같은 종류의 필통 3개에 나누어 넣을 때, 빈 필통이 없도록 넣는 경우의 수는? [3점]

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

8. 함수  $f(x) = x^3 + 3x$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4}$$

의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{6}$     ②  $\frac{1}{5}$     ③  $\frac{1}{4}$     ④  $\frac{1}{3}$     ⑤  $\frac{1}{2}$

9.  $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$$

의 모든 실근의 개수는? [3점]

- ① 2    ② 4    ③ 6    ④ 8    ⑤ 10

10. 좌표평면 위의 곡선  $y = \sqrt{x-3}$ 과  $x$ 축 및  $y$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① 7    ②  $\frac{15}{2}$     ③ 8    ④  $\frac{17}{2}$     ⑤ 9

11. 좌표평면에서 곡선  $y = e^{x-2}$  위의 점  $(3, e)$ 에서의 접선이  $x$ 축,  $y$ 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

- ①  $e$       ②  $\frac{3}{2}e$       ③  $2e$       ④  $\frac{5}{2}e$       ⑤  $3e$

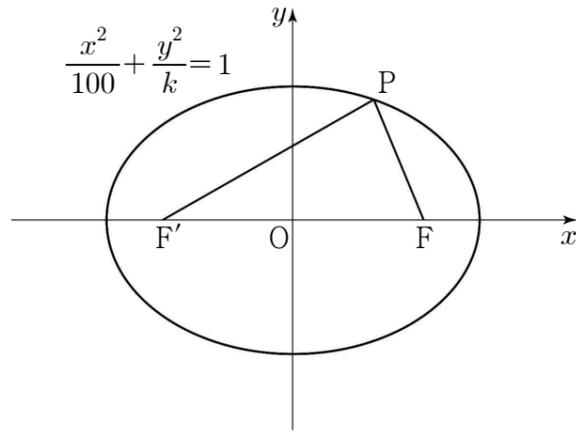
12. 집합  $X = \{1, 2\}$ 에서 집합  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수  $f$  중에서  $f(1) + f(2)$ 가 4의 배수가 되도록 하는 함수  $f$ 의 개수는? [3점]

- ① 8      ② 9      ③ 10      ④ 11      ⑤ 12

13. 함수  $f(x) = 12x \ln x - x^3 + 2x$ 에 대하여  $f''(a) = 0$ 인 실수  $a$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③ 1      ④  $\sqrt{2}$       ⑤ 2

14. 그림과 같이 타원  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{k} = 1$  위의 제1사분면에 있는 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여 삼각형 PF'F의 둘레의 길이가 34일 때, 상수  $k$ 의 값은? (단,  $0 < k < 100$ ) [4점]

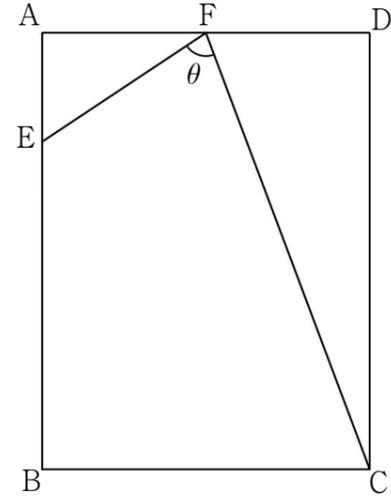


- ① 36      ② 41      ③ 46      ④ 51      ⑤ 56

15.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x dx$ 의 값은? [4점]

- ①  $\frac{\pi}{4}$     ②  $\frac{\pi}{2}$     ③  $\frac{3}{4}\pi$     ④  $\pi$     ⑤  $\frac{5}{4}\pi$

16. 그림과 같이 선분 AB의 길이가 8, 선분 AD의 길이가 6인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 AD의 중점을 F라 하자.  $\angle EFC = \theta$ 라 할 때,  $\tan \theta$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{22}{7}$     ②  $\frac{26}{7}$     ③  $\frac{30}{7}$     ④  $\frac{34}{7}$     ⑤  $\frac{38}{7}$

17. 두 집합

$$A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\},$$

$$B = \{x \mid (\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0\}$$

에 대하여  $A \cap B \neq \emptyset$  을 만족시키는 정수  $k$ 의 개수는? [4점]

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

18. 다음은 자연수  $n$ 에 대하여 부등식  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \times {}_n C_k\right) < 100$ 을 만족시키는  $n$ 의 최댓값을 구하는 과정이다.

이항정리를 이용하여  $(1+x)^n$ 을 전개하면

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \left( \boxed{\text{(가)}} \times x^k \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

위 식의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$2^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_n \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑의 양변을 0에서 1까지 적분하여

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = {}_n C_0 + \frac{1}{2} {}_n C_1 + \frac{1}{3} {}_n C_2 + \dots + \frac{1}{n+1} {}_n C_n \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

을 얻는다.

㉒과 ㉓에서

$$\begin{aligned} \boxed{\text{(나)}} + \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{2} {}_n C_1 + \frac{2}{3} {}_n C_2 + \frac{3}{4} {}_n C_3 + \dots + \frac{n}{n+1} {}_n C_n \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{k+1} \times {}_n C_k \right) \text{이므로} \end{aligned}$$

부등식  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{k+1} \times {}_n C_k \right) < 100$ 을 만족시키는  $n$ 의 최댓값은

$\boxed{\text{(다)}}$  이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식에 대하여  $k=1$ 일 때의 식을  $f(n)$ , (나)에 알맞은 식을  $g(n)$ , (다)에 알맞은 수를  $p$ 라 할 때,  $f(6) \times g(5) + p$ 의 값은? [4점]

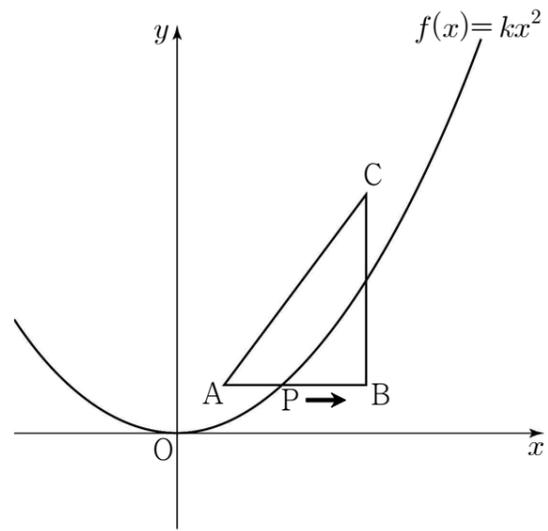
- ① 115      ② 120      ③ 125      ④ 130      ⑤ 135

19. 좌표평면에서 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 이고 한 초점이  $F(4\sqrt{3}, 0)$ 이다. 점 F를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는?  
(단,  $a, b$ 는 상수이다.) [4점]

- ①  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     ②  $\sqrt{3}$     ③  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$     ④  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$     ⑤  $2\sqrt{3}$

20. 그림과 같이 세 점  $A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 삼각형 ABC의 변을 따라 점 B를 지나 점 C까지 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 이차함수  $f(x) = kx^2$ 의 그래프가 점 P를 지난다.  $t$ 초 후 곡선  $y = f(x)$  위의 점 P에서의 접선의 기울기를  $g(t)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?  
(단, 점 P는 한 번 지나간 점은 다시 지나가지 않는다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ.  $0 \leq t < 3$ 일 때 점 P의 좌표는  $(t+1, 1)$

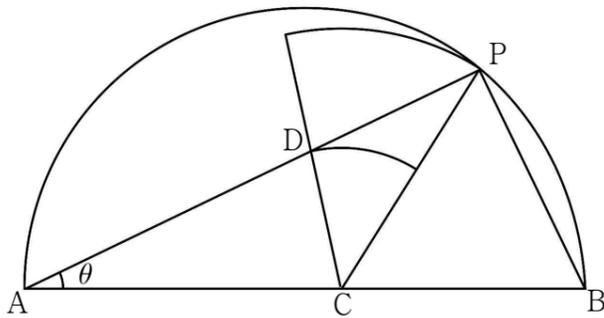
ㄴ.  $g(t) = \frac{2}{t+1}$  ( $0 \leq t < 3$ )

ㄷ.  $\int_0^7 g(t)dt = 6 + 4\ln 2$

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 점 P에 대하여  $\overline{BP} = \overline{BC}$ 가 되도록 선분 AB 위의 점 C를 잡고,  $\overline{AC} = \overline{AD}$ 가 되도록 선분 AP 위의 점 D를 잡는다.  $\angle PAB = \theta$ 에 대하여 선분 CD를 반지름으로 하고 중심각의 크기가  $\angle PCD$ 인 부채꼴의 넓이를  $S(\theta)$ , 선분 CP를 반지름으로 하고 중심각의 크기가  $\angle PCD$ 인 부채꼴의 넓이를  $T(\theta)$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta) - S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고  $\angle PCD$ 는 예각이다.) [4점]



- ①  $\frac{\pi}{16}$     ②  $\frac{\pi}{8}$     ③  $\frac{3}{16}\pi$     ④  $\frac{\pi}{4}$     ⑤  $\frac{5}{16}\pi$

단답형

22.  ${}_5\Pi_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ 에 대하여  $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 매개변수  $t(t > 0)$ 로 나타내어진 함수

$$x = t + 2\sqrt{t}, \quad y = 4t^3$$

에 대하여  $t = 1$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면에서 점  $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선이

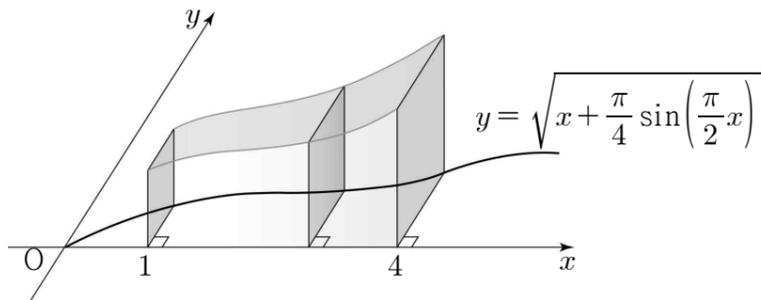
포물선  $y^2 = 8x$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

선분 PQ의 길이가 17일 때, 두 점 P, Q의  $x$ 좌표의 합을 구하시오.

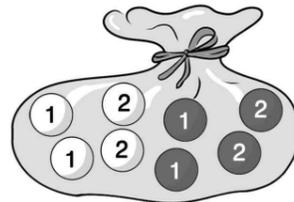
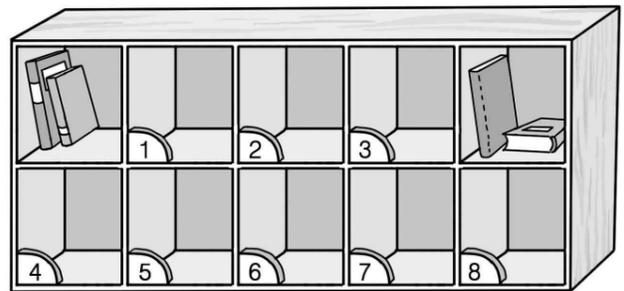
[3점]

26. 네 개의 자연수 2, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 8개를  
선택할 때, 선택된 8개의 수의 곱이 60의 배수가 되도록 하는  
경우의 수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 곡선  $y = \sqrt{x + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$  와  $x$ 축 및 두 직선  $x=1, x=4$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 주머니에 숫자 1이 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개, 숫자 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개가 들어 있고, 비어 있는 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 진열장이 있다.



숫자가 적힌 8개의 칸에 주머니 안의 공을 한 칸에 한 개씩 모두 넣을 때, 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공이 적힌 수의 합이 5이고 모두 같은 색이 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 공은 크기와 모양이 같다.) [4점]

29. 좌표평면에서 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여 두 곡선  $y = 3^x - n$ ,  $y = \log_3(x+n)$ 으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 4가 되도록 하는 자연수  $n$ 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 다항함수  $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식  $f(x)=0$ 의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.  
 (나)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$ 이 존재한다.  
 (다) 함수  $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는  $x = \frac{5}{4}$ 에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수  $g(x)$ 의 극솟값을  $k$ 라 할 때,  $27k$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.