2017년 4월 8일 시행 / 2017년 국가직 9급 공무원 임용시험

수학 기출해설

해설 – 최주연 교수(에듀윌)

문 1. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2017}=a+bi$

일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수)

① 1

② 0

③ -1

④ -2

정답 ③

$(\frac{(1-i)^2}{2})=\frac{1+i^2-2i}{2}=-i$

에서

$(-i)+(-i)^2+\cdots+(-i)^{2017}=-i$

$(\because (-i)+(-1)+(-i)^3+i^4=0)$

$\therefore a=0, b=-1$

문 2. 다항식 x^5+x^4을 x^2-4로 나누었을 때의 나머지는?

① $16x-32$

② $16x-16$

③ $16x+16$

④ $16x+32$

정답 ③

x^5+x^4를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,나머지를 $ax+b$라 하면

$x^5+x^4=(x^2-4)Q(x)+ax+b$ 라 나타낼수 있고, 이 식에 $x=\pm 2$를 각각 대입.

$2^5+2^4=2a+b$

$-2^5+2^4=-2a+b$

두식을 연립하여 풀면 $a=2^4, b=2^4$

이므로, 나머지는 $16x+16$이다.

문 3. 두 집합 $X=\{x \mid -1\le x\le 4\}$, $Y=\{y \mid -5\le y\le 5\}$에 대하여 함수 $f: X\to Y$가 $f(x)=ax+b$($a<0$)이다. 이 함수 f가 일대일 대응이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 ①

f가 일대일 대응이 되어야 하므로, $f(x)$는 반드시 $(-1,5)$와 $(4,5)$ 또는 $(4,-5)$와 $(-1,5)$를 지나야 한다. 하지만 $a<0$이므로 후자의 경우이다.

좌표를 대입하면

$$\begin{cases} 4a+b=-5 \\ -a+b=5 \end{cases}$$

에서

$a=-2, b=3$

$\therefore a+b=1$

문 4. 다음 함수의 그래프 중에서 x축의 방향 또는 y축의 방향으로 평행이동하여 서로 겹칠 수 없는 것은?

④ $y=\dfrac{-2x+5}{x-3}$

② $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$

③ $y=\dfrac{2x+1}{x}$

① $y=\dfrac{x-2}{x-1}$

정답 ②

① $y=-\dfrac{1}{x-3}-2$ → 평행이동으로 $-\dfrac{1}{x}$

② $y=\dfrac{1}{x}+2$ → 평행이동으로 $\dfrac{1}{x}$

③ $y=-\dfrac{1}{x+1}+2$ → 평행이동으로 $-\dfrac{1}{x}$

④ $y=-\frac{1}{x-1}+1$ → 평행이동으로 $-\frac{1}{x}$

문 5. $x^2+x+1=0$, $y^4-y^2+1=0$ **일 때,** x^6-y^6 **의 값은?**

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 ③

첫 번째 식의 양변에 $(x-1)$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1=0$

에서 $x^3=1$이므로

$x^6=1$

y^2을 t로 치환하면 x와 마찬가지로 $t^3=-1$ 이므로,

$y^6=-1$

$\therefore x^6-y^6=2$

문 6. 이차함수 $y=x^2-3x$**의 그래프와 직선** $y=x+k$**가 적어도 한 점에서 만나도록 하는 실수** k**의 값의 범위는?**

① $k\leq -8$

② $-8\leq k\leq -6$

③ $-6\leq k\leq -4$

④ $k\geq -4$

정답 ④

$x^2-3x=x+k$에서

$x^2-4x-k=0\cdots(1)$

(1)의 판별식 $D\geq 0$일 때, 적어도 하나의 실근을 갖게 되므로,

$16+4k\geq 0$

$\therefore k\geq -4$

문 7. $x>0$ **일 때, 함수** $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6$ **의 최솟값은?**

① -9

② -8

③ -7

④ -6

정답 ④

$x+\frac{1}{x}=t$라 두면, 산술기하평균에 의해,

$t \geq 2$

이다.

$y=t^2-2t-6=(t-1)^2-7$에서

$t=1$인 지점부터 증가하기 시작하므로 $t=2$일 때 최솟값 -6을 갖는다

문 8. 직선 $3x-4y+1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-k)^2+(y-2)^2=16$의 넓이를 이등분할 때, 상수 k의 값은?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

정답 ②

$3x-4y+1=0$을 x축에 대해 대칭이동 시키면, $3x+4y+1=0$이 된다.

원을 이등분하려면 직선이 원의 중점을 지나야 하므로, $3x+4y+1=0$은 $(k,2)$를 반드시 지난다.

그러므로 $(k,2)$를 대입하면

$3(k)+4(2)+1=0$

$\therefore k=-3$

문 9. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x+3}{x^{2n}+1}$에 대하여 $\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$의 값은?

① 4

② $\frac{9}{2}$

③ 5

④ $\frac{11}{2}$

정답 ④

$\lim_{x\to 1-} f(x)$인 경우, $x^{2n} < 1$을 만족하기 때문에

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \frac{0+2\times 1+3}{0+1} = 5$$

$\lim_{x\to 2+} f(x)$인 경우, $x^{2n} > 1$이므로, 분자분모를 x^{2n-1}로 나눠주면,

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \frac{1+\frac{2}{x^{2n-2}}+\frac{3}{x^{2n-1}}}{x+\frac{1}{x^{2n-1}}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x) = \frac{11}{2}$$

문 10. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-5}{x^3-27} = \frac{1}{9}$이 성립할 때, $f(3)f'(3)$의 값은?

① 15
② 20
③ 25
④ 30

정답 ①

준 식에 $x=3$을 대입하면,
(분자) $\to$ 0 이므로,
(분모) $\to$ 0 이어야한다.
$\therefore f(3) = 5$

$$(\text{준식}) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-5}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$
$$= \frac{1}{27}\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$= \frac{1}{27} f'(3)$$

$\therefore f'(3) = 3$
$f(3)f'(3) = 5\times 3 = 15$

문 11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$일 때, 다음 중 항상 성립하는 것은? (단, A^c은 A의 여집합)

① $B^c \subset A^c$

② $A \cap B = B$

③ $A \cap B^c = U$

④ $A^c \cup B = \varnothing$

정답 ①

①$B^c \subset A^c$는 $A \subset B$의 대우이므로 항상 성립한다.

② $A \cap B = A$

③$A \cap B^c = A - B = \varnothing$

④ $A^c \cup B = U$

문 12. 부정적분 $\int (x+1)^2 dx - \int (x-1)^2 dx$를 구하면?

① $\frac{1}{2}x^2 + C$ (단, C는 적분상수)

② $x^2 + C$ (단, C는 적분상수)

③ $2x^2 + C$ (단, C는 적분상수)

④ $\frac{1}{3}x^3 + C$ (단, C는 적분상수)

정답 ③

$$(\text{준 식}) = \int (x+1)^2 - (x-1)^2 dx$$
$$= \int 4x dx$$
$$= 2x^2 + C$$

문 13. 세 수 a, b, 5가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $-b$, 4, $8a$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은? (단, b는 자연수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 ①

$a, b, 5$가 등차수열을 이루기 때문에,

$2b = 5 + a$가 성립한다.

$-b, 4, 8a$가 등비수열을 이루기 때문에,

$4^2 = -8ab \cdots$ (1)가 성립한다.
$a = 2b - 5$를 (1)에 대입해서 이차방정식을 풀면,
$a = -1, b = 2$
$\therefore a + b = 1$

문 14. $\log_3 5$를 $\log_3 5 = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)로 표현할 때, 9^{α}의 값은?

① $3^{\frac{25}{9}}$
② $3^{\frac{5}{3}}$
③ $\frac{25}{9}$
④ $\frac{5}{3}$

정답 ③

$\log_3 5 = \log_3 3 + \log_3 \frac{5}{3} = 1 + \log_3 \frac{5}{3}$

$\log_3 \frac{5}{3} < 1$이므로, $\alpha = \log_3 \frac{5}{3}$

$\alpha = \log_3 \frac{5}{3}$에서, $3^{\alpha} = \frac{5}{3}$

$\therefore 9^{\alpha} = \frac{25}{9}$

문 15. $\left(ax^2 - \frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수가 240일 때, 실수 a의 값은?

① 2
② 3
③ 4
④ 5

정답 ②

주어진 식의 일반항은

${}_5C_r (ax^2)^r (-\frac{2}{x})^{5-r}$이므로

$\frac{1}{x^2}$이 되기위한 r의 값은 1이므로

1을 대입하여 정리하면

$5(a)(-2)^4 = (\frac{1}{x^2}$의 계수$) = 240$

$\therefore a = 3$

문 16. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(120, 6^2)$을 따를 때, 주어진 표준정규분포표를 이용하여 확률 $\mathrm{P}(117 \le X \le 132)$를 구하면?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328
② 0.6247
③ 0.6687
④ 0.7745

정답 ③

$P(117 \le X \le 132) = P(\frac{117-120}{6} \le Z < \frac{132-120}{6}) = P(-\frac{1}{2} \le Z \le 2)$이다.

$\therefore 0.1915 + 0.4772 = 0.6687$

문 17. $a = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-n+2}{2n^2+3n+1}$이고 $b = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-1} - n\right)$일 때, $a+b$의 값은?

① 4
② $\frac{7}{2}$
③ 3
④ $\frac{5}{2}$

정답 ④

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{2n^2+3n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{3}{2}$$
$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n-1}-n)(\sqrt{n^2+2n-1}+n)}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}$$
$$=1$$
$$\therefore a+b=\frac{5}{2}$$

문 18. 부등식 $x^2+y^2-2x-2y\le 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $2\sqrt{2}$

④ 4

정답 ④

$x^2+y^2-2x-2y=(x-1)^2+(y-1)^2-2$이므로,

$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$를 만족할 때 $x+y$의 최댓값을 구한다.

$x+y=k$라고 하면,

직선 $x+y-k=0$이 점$(1,1)$과 떨어진 거리가 $\sqrt{2}$일 때의 k값을 구한다.

점-직선 사이의 거리 관계에 의해,

$$\frac{|1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

$k=4$또는$k=0$에서, 최대일 때의 k값은 4이다.

문 19. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\int_2^x tf(t)\,dt=\frac{1}{2}x^2f(x)+x^4-2x^3$을 만족시키고 $f'(0)=12$일 때, $f(0)$의 값은?

① -8
② -6
③ -4
④ -2

정답 ①

$\int_2^x tf(t)dt = \frac{1}{2}x^2 f(x) + x^4 - 2x^3 \cdots (1)$ 에 $x=2$를 대입하면,

$0 = 2f(2) + 16 - 16$

$\therefore f(2) = 0$

(1)의 양변을 미분하면,

$xf(x) = xf(x) + \frac{1}{2}x^2 f'(x) + 4x^3 - 6x^2$

이를 정리하면

$f'(x) = 12 - 8x$

이므로,

$\int f'(x)dx = -4x^2 + 12x + C$

에서

$f(x) = -4x^2 + 12x + C$

$x=2$를 대입하면,

$0 = -16 + 24 + C$에서 $C = -8$

$\therefore f(x) = -4x^2 + 12x - 8$이므로 $f(0) = -8$

문 20. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x) = 6x^2 - 8$이고 $f(0) = 0$일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 12
② 16
③ 20
④ 24

정답 ②

$\int f'(x)dx = f(x) = 2x^3 - 8x + C$에서

$f(0) = 0$이므로, $C = 0$

$f(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x-2)(x+2)$

이는 다음과 같이 그려진다.

$-2 \le x \le 0$인 구간에서 $f(x) \ge 0$이고,
$0 \le x \le 2$인 구간에서 $f(x) \le 0$이므로,
구하고자 하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$$

이다.

$$\begin{aligned} 2\int_{-2}^{0} f(x)dx &= 2\int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)dx \\ &= 2[\frac{1}{2}x^4 - 4x^2]_{-2}^{0} \\ &= 16 \end{aligned}$$