1번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 복소수의 연산
★ 난이도	하

★ 개념

$\frac{1-i}{1+i}$의 분모, 분자에 $1-i$를 곱하면

$$\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

다음 복소수는 자주나오는 형태이므로 잘 기억해두시면 시간을 절약하는데 도움이 됩니다.

$\frac{1-i}{1+i}=-i$, $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$

$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$인 경우 : $x^2-x+1=0$, $x^3=-1$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$인 경우 : $x^2+x+1=0$, $x^3=1$

★ 풀이

$\frac{1-i}{1+i}=-i$이므로 준식은 다음과 같습니다.

$$(-i)+(-i)^2+\cdots+(-i)^{2017}=a+bi$$

$(-i)^2=-1$, $(-i)^3=i$, $(-i)^4=1$ 이므로

위의 식의 좌변의 항 4개씩 더하면 항상 0이 됩니다.

전체의 항이 2017개 이므로 4개씩 묶으면 맨 앞의 $-i$ 하나만 남게 됩니다.

$-i=a+bi$ $\quad\quad$ $\therefore\ a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$

2번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 나머지 정리
★ 난이도	중

★ 풀이

x^5+x^4을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 나눗셈의 관계식은 다음과 같습니다.

$$x^5+x^4=(x^2-4)Q(x)+ax+b$$

위의 식에 $x=\pm2$를 각각 대입하면 다음의 두 식을 얻을 수 있습니다.

$$2^5+2^4=2a+b$$

$$-2^5+2^4=-2a+b$$

두 식을 더하면 $2\times2^4=2b$ $\quad\quad$ $\therefore\ b=2^4$

b를 위의 식에 대입하면 $2^5=2a$ $\quad\quad$ $\therefore\ a=2^4$

$\therefore$ 나머지 = $16x+16$

3번

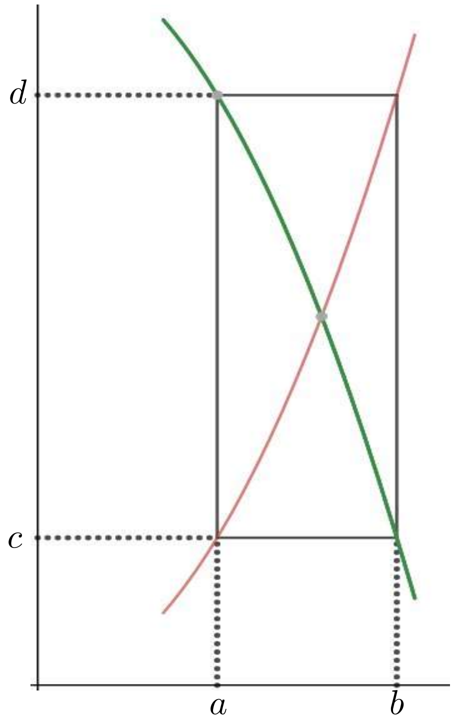
★ 정답	①
★ 출제영역	[수학2] 일대일 대응
★ 난이도	중

★ 개념

$X=\{x \mid a \le x \le b\}$

$Y=\{x \mid c \le x \le d\}$에 대하여

함수 $f: X \to Y$가 일대일 대응이 될 때의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같습니다.



증가함수인 경우에는 두 점 $(a,\ c)$, $(b,\ d)$를 지나고, 감수함수인 경우에는 두 점 $(a,\ d)$, $(b,\ c)$를 지나면 일대일 대응이 됩니다.

★ 풀이

$f(x)=ax+b \quad (a<0)$가 주어진 정의역과 공역에 대하여 일대일 대응이 되기 위해서는

두 점 $(-1,\ 5)$, $(4,\ -5)$를 지나야 합니다.

두 점을 지나는 직선은 다음과 같습니다.

$$f(x)=-2x+3$$

$\therefore\ a+b=1$

4번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학2] 유리함수
★ 난이도	하

★ 개념

유리함수의 표준형은 다음과 같습니다.

$$y=\frac{a}{x-m}+n$$

두 유리함수를 표준형으로 변형하였을 때

i) a의 값이 같으면

"평행이동"을 통해 두 함수의 그래프를 겹칠 수 있습니다.

ii) a의 절댓값은 같지만 부호가 다르면

"평행이동 또는 대칭이동"을 통해 두 함수의 그래프를 겹칠 수 있습니다.

★ 풀이

보기의 함수를 표준형으로 변형하면 다음과 같습니다.

① $y=\dfrac{-2(x-3)-1}{x-3}=\dfrac{-1}{x-3}-2$

② $y=\dfrac{1}{x}+2$

③ $y=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}=\dfrac{-1}{x+2}+2$

④ $y=\dfrac{x-1-1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}+1$

①, ③, ④는 a 값이 같으므로 평행이동을 통해 그래프를 서로 겹칠 수 있습니다.

②는 a값의 부호가 다르므로 평행이동과 대칭이동을 해야 ①, ③, ④의 그래프와 겹칠 수 있습니다.

5번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 곱셈공식의 활용
★ 난이도	하

★ 개념

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

★ 풀이

$x^2+x+1=0$의 양 변에 $x-1$을 곱하면 $x^3=1$

$y^4-y^2+1=0$의 양 변에 y^2+1을 곱하면 $y^6=-1$

$\therefore\ x^6-y^6=2$

6번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학2] 이차함수와 직선의 위치관계
★ 난이도	하

★ 개념

$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=mx+n$에 대하여

$f(x)=g(x)$의 해의 개수는 두 함수의 그래프 교점의 개수와 같습니다.

따라서

$$f(x)-g(x)=ax^2+(b-m)x+c-n=0$$

의 판별식에 D 대하여

i) $D>0$: 두 함수의 교점이 2개 (두 점에서 만난다.)

ii) $D=0$: 두 함수의 교점이 1개 (접한다.)

iii) $D<0$: 두 함수는 교점이 0개 (만나지 않는다.)

★ 풀이

두 함수가 적어도 한 점에서 만나기 위해서는

$x^2-3x=x+k$, $x^2-4x-k=0$의 판별식 $D\ge 0$을 만족해야 합니다.

$\therefore\ k\ge -4$

7번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 이차함수의 최대최소
★ 난이도	중

★ 개념

한 문자를 다른 문자로 치환할 때에는 정의역의 변화가 있는지 반드시 확인을 해야 합니다.

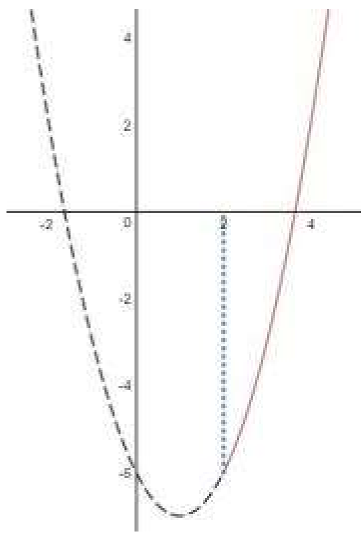
★ 풀이

산술/기하 평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

이므로 $x+\dfrac{1}{x}=t$라 치환하면 t의 범위는 $t\ge 2$입니다.

따라서 준식과 그래프는 다음과 같습니다.



$y=t^2-2t-6\ \ (t\ge 2)$

주어진 범위에서 y는 $t=2$일 때 최솟값을 갖습니다.

$\therefore$ 최솟값 = -6

8번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 도형의 이동
★ 난이도	하

★ 개념

ⅰ) 평행이동

x축으로 m만큼 평행이동 : $x \leftarrow x-m$

y축으로 n만큼 평행이동 : $y \leftarrow y-n$

ⅱ) 대칭이동

x축 대칭 : $y \leftarrow -y$

y축 대칭 : $x \leftarrow -x$

원점 대칭 : $x \leftarrow -x$, $y \leftarrow -y$

$y=x$ 대칭 : $x \leftrightarrow y$

직선이 도형의 넓이를 이등분하기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 합니다.

ⅰ) 원 : 직선이 원의 중심을 지남

ⅱ) 정사각형, 직사각형, 마름모, 평행사변형 : 대각선의 교점을 지남

ⅲ) 삼각형 : 한 꼭짓점과 마주보는 변의 중점을 지남

★ 풀이

직선 $3x-4y+1=0$을 x축에 대해 대칭이동한 직선은 다음과 같습니다.

$$3x+4y+1=0$$

이 직선이 원의 넓이를 이등분하기 위해서는 원의 중심 $(k,\ 2)$를 지나야 하므로 위의 식에 대입하면,

$$3k+8+1=0$$

$\therefore\ k=-3$

9번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 함수의 극한
★ 난이도	중

★ 개념

극한으로 주어진 함수의 경우 밑을 4개의 구간으로 나누어 각각의 구간에서 극한값을 구합니다.

$$|x|>1,\ |x|<1,\ x=1,\ x=-1$$

★ 풀이

함수 $f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2n-1}+2x+3}{x^{2n}+1}$을 각 구간별로 나누어 보면 다음과 같습니다.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & |x|>1\\ 2x+3 & |x|<1\\ \frac{7}{2} & x=1\\ 0 & x=-1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x+3)=5$$

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$

10번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 함수의 극한
★ 난이도	하

★ 풀이

$x\to3$일 때 분모가 0이므로 분자도 0입니다.

따라서 $f(3)=5$

$\frac{0}{0}$ 꼴이므로 로피탈의 정리를 이용합니다.

$$\lim_{x\to3}\frac{f'(x)}{3x^2}=\frac{f'(3)}{27}=\frac{1}{9}$$

따라서 $f'(3)=3$

$\therefore\ f(3)f'(3)=15$

11번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학2] 집합의 포함관계
★ 난이도	하

★ 개념

$A \subset B$ 이면 다음의 식은 항상 성립합니다.

$B^c \subset A^c$

$A \cap B = A$, $A \cup B = B$

$A - B = \varnothing$, $A \cap B^c = \varnothing$, $A^c \cup B = U$

★ 풀이

② $A \cap B = A$ (거짓)

③ $A \cap B^c = A - B = \varnothing$ (거짓)

④ $A^c \cup B = U$ (거짓)

12번

★ 정답	③
★ 출제영역	[미적분1] 부정적분
★ 난이도	하

★ 개념

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int \{f(x) \pm g(x)\}dx$$

★ 풀이

$$\int \{(x+1)^2 - (x-1)^2\}dx = \int 4x\,dx = 2x^2 + C$$

13번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학2] 수열
★ 난이도	하

★ 개념

세 수 a, b, c가 순서대로

등차수열을 이루면 : $2b = a + c$

등비수열을 이루면 : $b^2 = ac$

★ 풀이

a, b, 5가 등차수열을 이루므로

$2b = a + 5$ ㉠

$-b$, 4, $8a$가 등비수열을 이루므로

$4^2 = (-b) \times 8a$

$ab = -2$ ㉡

두 식을 연립하며 a, b를 구하면 $a = -1$, $b = 2$ 입니다.

$\therefore\ a + b = 1$

※ 이 문제와 같이 '자연수' 또는 '정수'라는 조건이 주어진 경우 두 식을 연립하여 이차방정식을 풀이하는 것보다 적당한 수를 대입해보며 만족하는 수를 찾는 것도 좋은 방법입니다.

14번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학2] 지수와 로그
★ 난이도	하

★ 풀이

$1 = \log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 9 = 2$

이므로 $\log_3 5$의 정수부분은 1입니다.

따라서 소수부분 α는 다음과 같습니다.

$$\alpha = \log_3 5 - 1 = \log_3 \frac{5}{3}$$

$$\therefore\ 9^\alpha = 9^{\log_3 \frac{5}{3}} = \frac{25}{9}$$

15번

★ 정답	②
★ 출제영역	[확통] 전개식의 계수
★ 난이도	하

★ 개념

$(a+b)^n$을 전개하였을 때 일반항은 다음과 같습니다.

$${}_nC_r \times a^r \times b^{n-r}$$

★ 풀이

주어진 식의 전개식의 일반항은 다음과 같습니다.

$${}_5C_r \times (ax^2)^r \times \left(-\frac{2}{x}\right)^{5-r}$$

$\frac{1}{x^2}$가 되기 위한 r의 값은 1이므로 대입하여 정리하면,

$${}_5C_1 \times (ax^2) \times (-\frac{2}{x})^4 = 5 \times a \times 16 \times \frac{1}{x^2}$$

$$5 \times a \times 16 = 240$$

$\therefore\ a = 3$

16번

★ 정답	③
★ 출제영역	[확통] 표준정규분포
★ 난이도	하

★ 개념

확률분포 X가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$를 따를 때 다음의 표준화 과정을 거친 후 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있습니다.

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \le Z \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

※ $\frac{a-m}{\sigma}$는 “확률변수가 평균으로부터 떨어진 거리가 표준편차의 몇 배인가”라고 해석하고 기억하면 암산만으로 충분히 표준화를 할 수 있습니다.

Z는 정규분포 $N(0,\ 1^2)$를 따르고 그 그래프는 $x=0$대칭입니다. 따라서 $P(0 \le Z \le 1)$과 $P(-1 \le Z \le 0)$의 값은 같습니다.

★ 풀이

확률변수 X가 $N(120,\ 6^2)$을 따를 때

117은 평균으로부터 떨어진 거리가 -3이므로 -0.5로, 132는 평균으로부터 12만큼 떨어져있으므로 2로 변환됩니다.

$$\begin{aligned} P(117 \le X \le 132) &= P(-0.5 \le Z \le 2) \\ &= 0.1915 + 0.4772 \\ &= 0.6687 \end{aligned}$$

17번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 수열의 극한
★ 난이도	하

★ 풀이

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{2n^2+3n+1}=\frac{3}{2}$$

b에서 분자를 유리화하면,

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}=1$$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{2}$

18번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 부등식의 영역
★ 난이도	중

★ 풀이

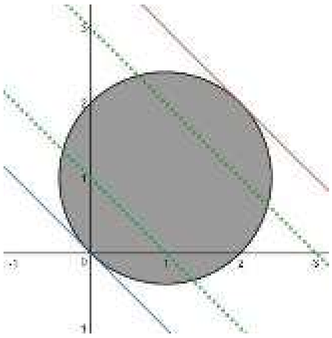
주어진 부등식의 좌변을 변형하면 다음과 같습니다.

$$(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$$

따라서 위의 부등식은 중심이 $(1,\ 1)$이고 반지름이 $\sqrt{2}$ 인 원의 경계와 내부의 영역을 의미합니다.

$x+y=k$라 하면 $y=-x+k$이므로 기울기가 -1인 직선입니다.

이 직선이 위의 부등식의 영역과 만나게 하는 k값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값입니다.



k는 직선의 y절편이므로 붉은색 직선(접할 때)일 때 최댓값, 파란색 직선일 때 최솟값입니다.

직선이 원과 접할 때 원의 중심과 직선까지의 거리가 반지름과 같습니다.

$$\frac{|1+1-k|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$$

$$|k-2|=2$$

$$k=0\ \text{or}\ 4$$

$\therefore\ k$의 최댓값 = 4

19번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 정적분의 활용
★ 난이도	중

★ 개념

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$와 같이 주어진 경우 다음 2가지 성질을 이용하여 식을 세웁니다.

i) 양 변에 $x=a$ 대입

$$g(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

ii) 양 변을 미분

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$g(x)=F(x)-F(a)$$

위의 양 변을 미분하면 다음과 같습니다.

$$g'(x)=f(x)$$

★ 풀이

주어진 식의 양 변에 $x=2$를 대입하면,

$$0=2f(2)$$

따라서 $f(2)=0$ ㉠

주어진 식의 양 변을 미분하면,

$$\begin{aligned} xf(x)&=\frac{1}{2}\{2xf(x)+x^2f'(x)\}+4x^3-6x^2 \\ &=xf(x)+\frac{1}{2}x^2f'(x)+4x^3-6x^2 \end{aligned}$$

위의 식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$f'(x)=-8x+12$$

$$f(x)=-4x^2+12x+C \quad ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $C=-8$

$\therefore\ f(0)=-8$

20번

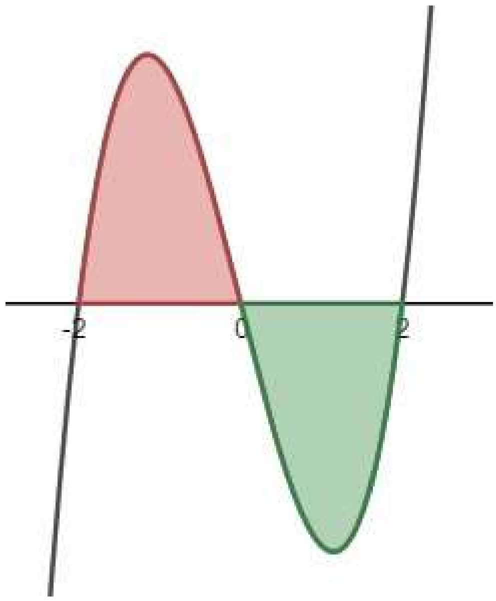
★ 정답	②
★ 출제영역	[미적분1] 정적분의 활용
★ 난이도	중

★ 풀이

$f'(x)=6x^2-8$, $f(0)=0$이므로 적분하여 $f(x)$를 구하면 다음과 같습니다.

$$f(x)=2x^3-8x=2x(x+2)(x-2)$$

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같습니다.



$y=f(x)$는 홀수차항만 존재하므로 원점 대칭인 함수(기함수)이며 따라서 붉은색 부분과 녹색부분의 넓이는 같습니다.

따라서 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 붉은색 부분의 넓이의 2배입니다.

$$\therefore\ 2\times\int_{-2}^{0}f(x)dx=2\left[\frac{1}{2}x^4-4x^2\right]_{-2}^{0}=16$$