1번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 이차방정식과 이차함수
★ 난이도	중

★ 개념

일부 구간($a \le x \le b$)에서 이차함수의 최대/최소를 구할 때는 꼭짓점(축)이 구간에 포함되어 있는지 확인합니다.

ⅰ) 포함되어 있는 경우

a) 꼭짓점이 최댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중 작은 값이 최솟값

b) 꼭짓점이 최솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중 큰 값이 최댓값

ⅱ) 포함되어 있지 않은 경우

$f(a)$와 $f(b)$중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값

★ 풀이

$f(x)=x^2-2x$의 축의 방정식은 $x=1$입니다.

주어진 구간이 $0 \le x \le t$이므로

ⅰ) $t \le 1$: 구간이 축을 포함하지 않음

이 경우 최솟값은 $f(t)=t^2-2t$

ⅱ) $t \ge 1$: 구간이 축을 포함함

이 경우 최솟값은 $f(1)=-1$

따라서 $f(x)$의 최솟값 $g(t)$는 다음과 같습니다.

$$g(t)=\begin{cases} t^2-2t & (t \le 1) \\ -1 & (t \ge 1) \end{cases}$$

$$\therefore\ g(2)+g'\left(\frac{1}{2}\right)=-1-1=-2$$

2번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 미분의 정의
★ 난이도	중

★ 풀이

$f(x)=x^2+x+1$이므로 미분하면 $f'(x)=2x+1$

$$\therefore\ f'(1)=3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{(1+h)^2+(1+h)+1-3}{h}-3\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{h^2+3h}{h}-3\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

★ 풀이 (로피탈의 정리)

$h\to 0$일 때 분모가 0이 되지 않는 형태가 될 때까지 분모/분자를 미분합니다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-f'(1)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-hf'(1)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(1+h)}{2}$$

$f(x)=x^2+x+1$를 두 번 연속 미분하면,

$f'(x)=2x+1$

$f''(x)=2$

위의 식에 대입하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(1+h)}{2}=1$$

3번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학2] 수열의 합
★ 난이도	하

★ 풀이

좌우변을 각각 전개해서 비교해보겠습니다.

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$$

$$\sum_{k=1}^{9} (a_k + 2) = (a_1 + 2) + (a_2 + 2) + \cdots + (a_9 + 2)$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + 18$$

좌우변이 같으므로 $a_{10} = 18$입니다.

4번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학2] 함수
★ 난이도	하

★ 개념

합성함수의 역함수

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

★ 풀이

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$을 준식에 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} & (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) \\ = & (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3) \\ = & (g^{-1} \circ f)(3) \\ = & g^{-1}(f(3)) \\ = & g^{-1}(2) \end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$라 하면, $g(k) = 2$ 입니다.

$2 = \sqrt{2k-1}$

$\therefore \ k = \frac{5}{2}$

5번

★ 정답	③
★ 출제영역	[확률과통계] 통계
★ 난이도	상

★ 개념

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 어떤 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 그 평균을 $\overline{x}$라 하면

$\overline{x}$의 분포는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따릅니다.

즉, 모집단의 분포를 알면 임의추출한 n개의 '평균의 분포'를 알 수 있습니다.

따라서 정규분포를 따르는 집단에서 임의추출한 'n개의 합'을 구하는 문제는 'n개의 평균'으로 전환하여 식을 세워야 합니다.

★ 풀이

정규분포 $N(60,\ 6^2)$을 따르는 집단에서 9개를 임의추출하여 그 평균을 $\overline{x}$라 하면 $\overline{x}$는 정규분포 $N(60,\ 2^2)$을 따릅니다.

임의추출한 9개의 무게의 합이 $549g$이상일 확률은 임의추출한 9개의 평균이 $61g$이상일 확률입니다.

$P(\overline{x} \geq 61) = P(z \geq 0.5) = 0.5 - P(0 \leq z \leq 0.5) = 0.3085$

6번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학2] 함수
★ 난이도	하

★ 개념

$ax^2 + bx + c < 0$의 해가 존재하지 않을 조건은 다음과 같습니다.

i) $a = 0,\ b = 0,\ c \geq 0$

ii) $a > 0,\ D \leq 0$

★ 풀이

$x^2 + kx + 2k < 0$의 해가 존재하지 않을 조건은 $D \leq 0$입니다.

$k^2 - 8k \leq 0$

$0 \leq k \leq 8$

$\therefore$ 만족하는 정수 k는 9개

7번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 복소수
★ 난이도	하

★ 개념

계수가 '실수'인 이차방정식의 한 허근이 z이면 켤레복소수인 $\bar{z}$도 반드시 방정식의 근이 됩니다.

★ 풀이

$x^2-2x+2=0$의 두 근이 z, $\bar{z}$이므로 근과계수와의 관계에 의하여 다음의 두 식을 얻을 수 있습니다.

$z+\bar{z}=2,\ z\bar{z}=2$

준식을 합과 곱을 이용할 수 있도록 정리하면,

$z^3+(\bar{z})^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})=-4$

8번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 미분
★ 난이도	중

★ 풀이

$x\to1$일 때 분모가 0이면 분자도 0이어야 합니다.

따라서 $f(3)=3$

$x+2=t$로 치환합니다.

$$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-3}{(t-2)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-3}{(t-3)(t-1)}$$
$$=f'(3)\cdot\frac{1}{2}=1$$

$f'(3)=2$이므로 $x=3$에서의 접선의 기울기가 2이고, $(3,\ 3)$을 지나므로 접선의 방정식은 다음과 같습니다.

$y=2x-3$

$\therefore\ 2a+b=1$

★ 풀이 (로피탈의 정리)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x+2)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x+2)}{2x}=\frac{f'(3)}{2}=1$$

따라서 $f'(3)=2$

9번

★ 정답	③
★ 출제영역	[미적분1] 수열의 극한
★ 난이도	하

★ 풀이

분모, 분자의 차수가 같으므로 극한값은 최고차항의 계수의 비와 같습니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

10번

★ 정답	④
★ 출제영역	[확률과통계] 확률
★ 난이도	하

★ 개념

두 사건 A, B가 서로 독립이면 다음의 식이 성립합니다.

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

★ 풀이

$P(A\cap B)=x$라 하면 $P(A)=2x$입니다.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0.8-x$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$x=2x\times(0.8-x)$

$x=0.3$

$\therefore\ P(A)=0.6$

11번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 도형의 방정식
★ 난이도	중

★ 풀이

x축 위의 한 점 $P(x,\ 0)$과 두 점 $A(a,\ b)$, $B(c,\ d)$ 그리고 점 B를 x축 대하여 대칭한 점을 $B'(c,\ -d)$라 합니다.

$\overline{BB'}$과 x축이 만나는 점을 H라 하면

$\triangle BPH \equiv \triangle B'PH$ (SAS) 이므로 $\overline{PB} = \overline{PB'}$입니다.

$\overline{PA}+\overline{PB} = \overline{PA}+\overline{PB'}$이므로 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{PA}+\overline{PB'}$의 최솟값과 같으며 이는 $\overline{AB'}$의 길이입니다.

★ 풀이

$\sqrt{(x-3)^2+4}+\sqrt{(x-4)^2+1}$은 다음과 같이 생각해 볼 수 있습니다.

$\sqrt{(x-3)^2+4}$ = 두 점 $(x,\ 0)$, $(3,\ 2)$ 사이의 거리

$\sqrt{(x-4)^2+1}$ = 두 점 $(x,\ 0)$, $(4,\ 1)$ 사이의 거리

$P(x,\ 0)$, $A(3,\ 2)$, $B(4,\ 1)$, $B'(4,\ -1)$에 대하여

$\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이이므로

$\therefore\ \sqrt{10}$

12번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학2] 집합과 명제
★ 난이도	하

★ 풀이

조건 $p : (x-1)(x-9) > 0$에 대하여 조건 $\sim p$는 조건 p의 부정이므로 다음과 같습니다.

$\sim p : (x-1)(x-9) \le 0$

진리집합은 $\{x \mid 1 \le x \le 9\}$이므로 원소의 개수는 9개

13번

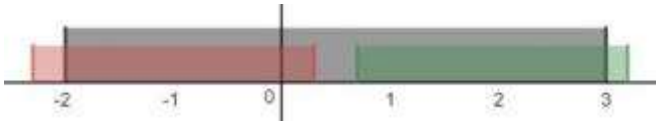
★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 부등식
★ 난이도	중

★ 풀이

연립부등식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{cases} -2 \le x \le 3 \\ k-5 < x < k+5 \end{cases}$$

첫번째 부등식의 구간의 길이는 5이고, 두번째 부등식의 구간의 길이는 10입니다. 따라서 두 부등식을 동시에 만족시키는 정수가 3개라 할 때, 그 3개의 정수는 양 끝의 3개가 될 수 밖에 없습니다.



ⅰ) 3개의 정수근이 -2, -1, 0인 경우

두번째 부등식 $k-5 < x < k+5$는 위의 그림에서 빨간색 부분처럼 위치해야 합니다.

따라서 $k-5 < -2,\ 0 < k+5 \le 1$

두 부등식을 연립하면 $-5 < k \le -1$

ⅱ) 3개의 정수근이 1, 2, 3인 경우

$k-5 < x < k+5$는 위의 그림에서 녹색 부분처럼 위치해야 합니다.

따라서 $0 \le k-5 < 1,\ 3 < k+5$

두 부등식을 연립하면 $5 \le k < 6$

따라서 양수 k의 최솟값은 5

14번

★ 정답	③
★ 출제영역	[확률과통계] 확률
★ 난이도	하

★ 개념

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때,

$E(X)=np,\ \ V(X)=np(1-p)$

$P(X=r)={}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}$

확률변수 X의 평균 $E(X)$, $V(X)$에 대하여, 확률변수 $aX+b$의 평균과 분산은 다음과 같습니다.

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$V(aX+b)=a^2V(X)$

★ 풀이

확률변수 X가 이항분포 $B(10,\ p)$를 따를 때,

$P(X=4)={}_{10}C_4\,p^4(1-p)^6$

$P(X=5)={}_{10}C_5\,p^5(1-p)^5$

이를 준식에 대입하여 정리하면,

$1-p=\frac{2}{5}p,\ \ p=\frac{5}{7}$

따라서 확률변수 X의 평균은 $E(X)=10\times\frac{5}{7}$

$E(14X)=14E(X)=14\times10\times\frac{5}{7}=100$

15번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학2] 유리함수
★ 난이도	하

★ 개념

유리함수 $f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$의 역함수는 다음과 같습니다..

$f^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$

★ 풀이

유리함수와 그 역함수의 그래프가 일치하므로

$\frac{2x+b}{x+a}=\frac{-ax+b}{x-2}$

$\therefore\ \ a=-2$

16번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학2] 지수와 로그
★ 난이도	하

★ 풀이

좌우변의 식을 지수 형태로 변형하면 다음과 같습니다.

$\sqrt[8]{a^{5k}}=a^{\frac{5k}{8}}$

$\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt{a^5}}}=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{2}{12}}\times a^{\frac{5}{24}}=a^{\frac{5}{8}}$

$\therefore k=1$

17번

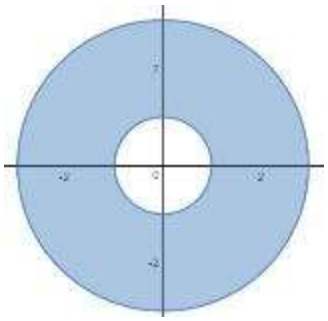
★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 부등식의 영역
★ 난이도	하

★ 풀이

부등식 $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-k)\le 0$이 나타내는 영역은 다음의 연립방정식이 나타내는 영역입니다.

$$\begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le k \end{cases}$$

부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같습니다.



색칠한 부분의 넓이는 $(k-1)\pi = 8$이므로

$\therefore\ k=9$

18번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 이차방정식
★ 난이도	하

★ 풀이

$x^2+5x+4=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=4$이므로 두 근은 모두 음수입니다.

따라서 $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$입니다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 &= \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\ &= \alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -9\end{aligned}$$

19번

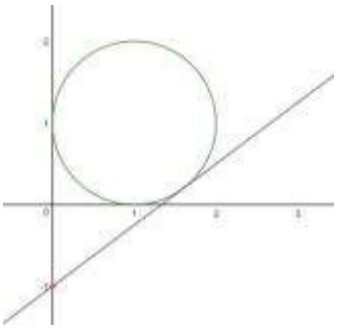
★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 적분
★ 난이도	중

★ 개념

원과 직선이 접하면 다음의 등식이 성립합니다.

원의 중심에서 직선까지의 거리 = 원의 반지름의 길이

★ 풀이



중심이 $(1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원과 $(0,\ -1)$을 지나는 직선이 두 점에서 만나기 위해서는 위의 그림과 같이 접할 때보다 기울기가 더 커야 합니다.

접할 때의 기울기를 m이라 하면,

$$\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ m=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ m>\frac{3}{4}$

20번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 정적분
★ 난이도	중

★ 풀이

주어진 도함수 $y=f'(x)$를 적분하면 다음과 같습니다.

$$f(x)=\begin{cases} x+C_1 & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3-2x+C_2 & (x>0) \end{cases}$$

조건에 의해 $f(0)=0$이므로 $C_1=C_2=0$입니다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-2x\right)dx \\ &= -\frac{17}{12}\end{aligned}$$