수 학

정 답

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
④	④	③	④	④	②	③	①	①	②
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
①	③	①	④	①	③	③	①	②	②

문 1. $x-y=2$, $y-z=4$일 때,
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$의 값은?

① 50 ② 52
③ 54 ④ 56

[풀이] $z-x=(y-z)+(x-y)=6$.

$$\therefore\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 2^2+4^2+6^2 = 4+16+36=56$$

문 2. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-1}{x^n+1}$ 에 대하여 $f(9)+f\left(\dfrac{1}{9}\right)$ 의 값은?

① 11 ② 10
③ 9 ④ 8

[풀이] $f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{x-\dfrac{1}{x^n}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=x & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -1 & (0\le x<1)\end{cases}$

$$\therefore\ f(9)+f\left(\frac{1}{9}\right)=9+(-1)=8$$

문 3. 다항식 $f(x)$는 다음 세 조건을 만족한다.

> ㉠ $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 1이다.
> ㉡ $f(x)$를 $x-2$로 나누면 나머지가 7이다.
> ㉢ $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누면 몫과 나머지가 서로 같다.

$f(x)$를 $x-3$으로 나눌 때의 나머지의 값은?

① 9 ② 27
③ 45 ④ 54

[풀이] ㉠에 의해 $f(-1)=1$, ㉡에 의해 $f(2)=7$.
㉢에 의해 $f(x)=\{(x+1)(x-2)\}(ax+b)+(ax+b)$.
⇒ $f(-1)=-a+b=1$, $f(2)=2a+b=7$을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$이다. 따라서

$$f(3)=(3+1)(3-2)(3\cdot2+3)+(3\cdot2+3)=4\cdot1\cdot9+9=45$$

문 4. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax^2-3x+1}{3x^2+2}=\dfrac{2}{3}$를 만족할 때, a의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1
③ $\dfrac{4}{3}$ ④ 2

[풀이] 극한 식의 분자와 분모가 모두 다항식이고 $x\to\infty$이면 극한값은 최고차항의 계수의 비이다.

따라서 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}$. $\therefore\ a=2$.

문 5. 자유투 성공률이 80인 농구선수가 100개의 자유투를 던졌을 때, 86개 이상 성공시킬 확률은?
(단, $P(0\le Z\le 1.5)=0.43$)

① 1% ② 3%
③ 5% ④ 7%

[풀이] 이 농구선수의 자유투 성공 시행은 이항분포를 따르며 시행횟수는 100번, 성공률은 0.8이다. 시행횟수가 충분히 크므로 정규분포에 근사하며 평균은 $100\times0.8=80$, 분산은 $100\times0.8\times(1-0.8)=16$이다.

따라서 $P(X\ge 86)=P\left(Z\ge\dfrac{86-80}{\sqrt{16}}\right)=P(Z\ge 1.5)$

$$=0.5-P(0\le Z\le 1.5)=0.07.$$

문 6. $x+y=2$, $xy=-1$일 때, x^3+y^3의 값은?

① 13 ② 14

③ 15 ④ 16

[풀이] $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3+3(2)=14$

문 7. 원 $x^2+y^2+6x-4y+4=0$을 원 $x^2+y^2=9$로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $y=-2x+1$이 $\alpha x+y+\beta=0$으로 옮겨질 때, 두 상수 α, β의 합 $\alpha+\beta$의 값은?

① -5 ② -4

③ -3 ④ -2

[풀이] $x^2+y^2+6x-4y+4=(x+3)^2+(y-2)^2=9$

이므로 x축의 양의 방향으로 3만큼, y축의 음의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 따라서

$y-(-2)=-2(x-3)+1 \Rightarrow 2x+y-5=0$.

$\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-5.\ \Rightarrow \alpha+\beta=-3$

문 8. 양수 x, y, z에 대하여 $\sqrt{2^x}=9^y=125^z=\alpha$,

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2y}+\dfrac{1}{3z}=1$일 때, 양수 α의 값을 구하면?

① 270 ② 280

③ 290 ④ 300

[풀이] $\sqrt{2^x}=\alpha \Rightarrow \dfrac{x}{2}=\log_2\alpha$, $9^y=\alpha \Rightarrow 2y=\log_3\alpha$,

$125^z=\alpha \Rightarrow 3z=\log_5\alpha$.

$$\therefore\ \frac{2}{x}+\frac{3}{2y}+\frac{1}{3z}=\log_\alpha 2+\log_\alpha 3^3+\log_\alpha 5=\log_\alpha(2\cdot27\cdot5)$$

$$=\log_\alpha 270.\ \therefore\ \alpha=270$$

문 9. 무한급수 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^3$의 값은?

① 90 ② 60

③ 30 ④ 0

[풀이]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2+\frac{(4-2)k}{n}\right\}^3\cdot\frac{4-2}{n}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\int_2^4 x^3\,dx=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^4$$

$$=90$$

문 10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3n$을 만족할 때, $a_k=110$이 되는 k의 값은?

① 8 ② 9

③ 10 ④ 11

[풀이] $\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$

$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}3k=2+\frac{(n-1)(3+(3n-3))}{2}$$

$$=2+\frac{3}{2}n(n-1)$$

$a_k=2+\dfrac{3}{2}k(k-1)=110 \Rightarrow k(k-1)=72.\ \therefore\ k=9.$

문 11. 다음은 어느 백화점에서 판매하고 있는 운동화에 대한 제조회사별 고객의 선호도를 조사한 표이다.

제조회사	A	B	C	D	계
선호도(%)	20	28	25	27	100

192명의 고객이 각각 한 켤레씩 운동화를 산다고 할 때, C회사 제품을 선택할 고객이 39명 이상일 확률을 주어진 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	0.5	1.0	1.5	2.0
$P(0\le Z\le z)$	0.1915	0.3413	0.4332	0.4772

① 0.9332 ② 0.8256

③ 0.7745 ④ 0.6915

[풀이] C회사 제품을 선호하는 시행은 이항분포를 따르며 시행횟수는 192번, 성공률은 $\dfrac{25}{100}=0.25$이다. 시행횟수가 충분히 크므로 정규분포에 근사하며

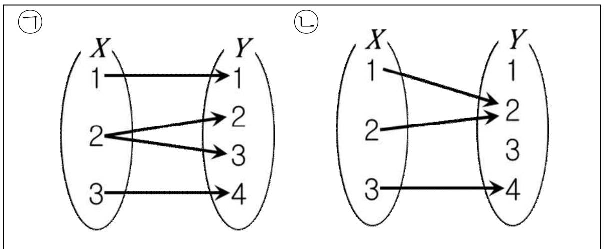
평균은 $192\times0.25=48$,

분산은 $100\times0.25\times(1-0.25)=36$이다.

$$\therefore P(X\ge 39)=P\left(Z\ge\frac{39-48}{\sqrt{36}}\right)=P(Z\ge-1.5)$$

$$=0.5+P(0\le Z\le 1.5)=0.9332.$$

문 12. 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수인 것만을 모두 고른 것으로 가장 옳은 것은?



㉢ $f(x)=2x$, $x\in X$ ㉣ $f(x)=x+1$, $x\in X$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢
③ ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉢, ㉣

[풀이] ㉠ $f(2)$의 값은 오직 하나이어야 한다. (×)
㉡ (○)
㉢ $f(3)=2\times3=6$. $6\notin Y$. (×)
㉣ (○)

문 13. 다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?

㉠ 모든 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)=f(x)+f(y)$
㉡ $f'(0)=2$

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$
③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{1}{4}$

[풀이] $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=2 .$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=2.$$

따라서 $f(x)=2x$ 이므로 $\dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{2}{2}=1$.

문 14. 이차식 $2x^2-5x+1$을 복소수의 범위에서 인수분해 한 것으로 가장 옳은 것은?

① $\left(x+\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

② $2\left(x+\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$

③ $\left(x-\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

④ $2\left(x-\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}\right)$

[풀이] 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}.$$ 따라서

$$2x^2-5x+1=2\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right).$$

[별해] 최고차항의 계수가 2인 ②, ④ 선택.

두 근의 합이 $\dfrac{5}{2}$인 ④ 선택.

(참고: ②은 두 근의 합이 $-\dfrac{5}{2}$이다.)

문 15. 삼차방정식 $x^3+ax+2=0$ 의 세 근이 모두 정수 일 때, a의 값은?

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0

[풀이] 세 근을 A, B, C라 할 때 A+B+C=0, ABC=-2이다. 이를 만족하는 정수 A, B, C는 -2, 1, 1이다(순서 무관).
따라서 $a=$AB+BC+CA=-2-2+1=-3.

문 16. 분수함수 $y=\dfrac{1}{x+1}+a$의 그래프의 점근선 방정식이 $x=b$, $y=2$라고 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 1 ② 3
③ 5 ④ 7

[풀이] $y=\dfrac{1}{x+1}+a$의 점근선은 $x=-1$, $y=a$이므로 $a=2$, $b=-1$이다. 따라서 $a^2+b^2=4+1=5$.

문 17. 어느 항공 노선을 예약한 사람이 사전 통보 없이 탑승하지 않을 확률이 0.1이라 한다. 좌석 수가 60이고 62명이 예약하였을 때, 좌석이 부족하게 될 확률은?

(단, $0.9^{61}=0.0016$, $0.9^{62}=0.0015$로 계산한다.)

① 0.01138 ② 0.01140
③ 0.01142 ④ 0.01144

[풀이] 항공 노선 예약 시행은 이항분포를 따르며 시행횟수는 62번, 성공률은 0.9(=1-0.1)이다. 좌석이 부족하려면 예약한 인원이 61명이거나 62명이면 된다. 따라서

$$P(X=61)+P(X=62)$$
$$={}_{62}C_{61}(0.9)^{61}(0.1)^1+{}_{62}C_{62}(0.9)^{62}(0.1)^0$$
$$=62\times0.0016\times0.1+1\times0.0015\times1=0.01142$$

문 18. $x>2$일 때, $4x-4+\dfrac{4}{x-2}\geq k$이 항상 성립하기 위한 k의 최댓값을 m, 그 때의 x의 값을 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

① 15 ② 16
③ 17 ④ 18

[풀이] t를 $t=x-2>0$이라 하자.

$$4x-4+\frac{4}{x-2}=4(x-2+1)+\frac{4}{x-2}=4\left(t+\frac{1}{t}\right)+4.$$

$$t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2 \ (\text{부호는 } t=\frac{1}{t}\Rightarrow t=1).$$

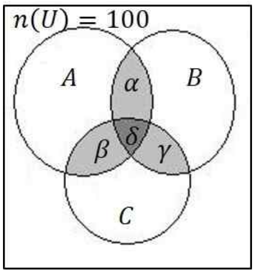
따라서 $4\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+4\geq 4\cdot2+4=12.$

$\therefore\ m=12,\ t=1\ \Rightarrow\ x=3=n.\ m+n=15$

문 19. 100명의 학생에게 A, B, C 세 개의 수학 문제를 풀게 하였다. 그 중에서 A 문제를 맞힌 학생이 48명, B 문제를 맞힌 학생이 52명, C 문제를 맞힌 학생이 45명, A, B, C 세 문제를 모두 맞힌 학생이 13명, A, B, C 세 문제 중 한 문제도 맞히지 못한 학생이 8명이라고 한다. 이때, A, B, C 세 문제 중 두 문제만을 맞힌 학생의 수는?

① 26 ② 27
③ 33 ④ 66

[풀이] 벤 다이어그램으로 나타내보자.



구하고자 하는 학생 수는 $\alpha+\beta+\gamma$이고,

$\delta=n(A\cap B\cap C)=13,\ n(A\cup B\cup C)=100-8=92.$

따라서

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}\\&\quad+n(A\cap B\cap C)\\&=(48+52+45)-(\alpha+13+\beta+13+\gamma+13)-13\\&=119-(\alpha+\beta+\gamma).\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=119-92=27.$

문 20. 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x축 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프가 점 $(a,3)$을 지날 때, a의 값은?

① -5 ② -6
③ -7 ④ -8

[풀이] 역으로 생각해보자.

점 $(a,3)$를 x축의 음의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $(a-1,3)$이다. 이 점을 y축에 대하여 대칭이동하면 $(1-a,3)$이다. 따라서 점 $(1-a,3)$은 함수 $y=\sqrt{x+2}$위의 점이므로, $3^2=1-a+2=3-a$ $\Rightarrow a=-6.$