

총평:

2017년 서울시 수학은 경우의 수에서 새로 포함된 자연수의 분할과 중복조합에서 문제가 출제되어 당황했을 수도 있으나 이 문제들 포함 대부분의 문제가 기출 문제나 수업시간에 문제집에서 한 번 이상은 봤었던 평범한 유형들로 구성되어 풀이 방법이 떠오르지 않아서 못 풀 문제는 별로 없었을 것이라 생각됩니다.

항상 관건이었던 시간분배도 경우의 수를 제외하고 모든 문제를 15분 내외로 해결할 수 있었던 문제였습니다.

수고 하였고 좋은결과가 있기를 기원합니다.

1. 정답 ④

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 b} + \frac{1}{\log_4 b} + \frac{1}{\log_8 b} &= \log_b 2 + \log_b 4 + \log_b 8 \\ &= \log_b 2 + 2\log_b 2 + 3\log_b 2 = 6\log_b 2 = \log_b 2^6 \quad \text{이고} \\ \frac{2}{\log_a b} &= 2\log_b a = \log_{b^2} a^2 \quad \text{이므로} \quad \log_b 2^6 = \log_{b^2} a^2 \\ a^2 &= 2^6 \quad \therefore a = 2^3 (a > 0) \end{aligned}$$

2. 정답 ①

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x f'(x^2) \cdot 2x}{3x^2} = \frac{2f'(1)}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$$

3. 정답 ①

$$f'(x) = 2x + a \quad \text{이고} \quad f'(3) = 6 + a$$

로피탈의 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} 2f'(3+2h) = 2f'(3) = 2(6+a) = 10 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

4. 정답 ①

$x \neq 1$ 이므로 양변을 $x^3 + 1$ 로 나누면

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{x^3+1} = \frac{2x - x^2(x-1)}{2(x-1)} \times \frac{1}{x^3+1} \\ &= \frac{-x(x+1)(x-2)}{2(x-1)(x^3+1)} \end{aligned}$$

$x \neq 1$ 인 모든 실수에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x+1)(x-2)}{2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x-2)}{2(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5. 정답 ③

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= a \quad \text{라 두면} \quad f(x) = x^3 - x + a \\ \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 (t^3 - t + a) dt = \frac{16}{4} - \frac{4}{2} + 2a = a \\ \therefore a &= -2 \quad f(3) = 22 \end{aligned}$$

6. 정답 ①

$$\begin{aligned} (f \circ g)(4) &= f(8) = 8a + 2, \quad (g \circ f)(3) = g(3a+2) = 6a + 4 \\ \therefore 8a + 2 &= 6a + 4 \quad \text{이므로} \quad a = 1 \end{aligned}$$

7. 정답 ③

$$\begin{aligned} f(3x-1) &= 9x-5 \quad \text{이고} \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{를 대입하면} \quad f(1) = 1 \\ \therefore f^{-1}(1) &= 1 \end{aligned}$$

8. 정답 ④

$$\begin{aligned} 100 \text{ 이하의 자연수중 } 3 \text{으로 나눈 나머지가 } 2 \text{인 수는} \\ 2, 5, 8, 11, \dots, 98 \text{이므로 초항이 } 2, \text{ 공차가 } 3 \text{인 등차수열이} \\ \text{다.} \\ 98 &= 2 + (n-1)3, \quad n = 33 \quad \text{이므로 총 항의 수는 } 32 \text{개 이다} \\ 2 + 5 + 8 + \dots + 98 &= \frac{33(2+98)}{2} = 1650 \end{aligned}$$

9. 정답 ②

$$\begin{aligned} \text{전체학생의 집합을 } U \text{ 라 하면 } n(U) &= 80 \\ \text{영어를 신청한 학생의 집합을 } A \text{ 라 하면 } n(A) &= 54 \\ \text{수학을 신청한 학생의 집합을 } B \text{ 라 하면 } n(B) &= 47 \\ \text{수학만 신청한 학생의 집합은 } n(A^c \cap B) \text{ 이므로} \\ n(A^c \cap B) &= n(U) - n(B) = 80 - 54 = 26 \end{aligned}$$

10. 정답 ④

$$\begin{aligned} x &= 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \quad \text{이므로} \\ x^3 &= \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \right)^3 = 2 + 2^{-1} + 3 \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}} \right) = \frac{5}{2} + 3x \\ x^3 - 3x &= \frac{5}{2} \quad \therefore 2x^3 - 6x = 5 \end{aligned}$$

11. 정답 ④

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= t \quad \text{로 치환하면} \\ (x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) - 3 &= t(t-2) - 3 = t^2 - 2t - 3 \\ &= (t+1)(t-3) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x+1)^2(x-1)(x+3) \\ \therefore a &= 1, \quad b = 3 \end{aligned}$$

12. 정답 ③

$$x^2 - 4x + 4 - k^2 = (x + k - 2)(x - k - 2) \leq 0$$

$$\therefore 2 - k \leq x \leq 2 + k$$

정수해의 개수는 $2 + k - (2 - k) + 1 = 2k + 1$

$$14 = \frac{(2k+1)(2-k+2+k)}{2} \quad \therefore k = 3$$

13. 정답 ②

자연수의 분할이므로

$$\begin{aligned} P(8, 4) &= 1 + 1 + 1 + 5 = 1 + 1 + 2 + 4 = 1 + 1 + 3 + 3 \\ &= 1 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 + 2 \end{aligned}$$

14. 정답 ②

나머지 여섯 개의 노트를 A, B, C 에 나눠주는 방법의 수와 같으므로

A, B, C가 가져가는 노트의 수를 x, y, z ($x, y, z \geq 0$)이라 하면 $x + y + z = 6$ 이므로 ${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_2 = 28$

15. 정답 ④

	중국어	일본어	
남	12	8	20
여	6	10	16
	18	18	38

위 표에서 $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

16. 정답 ①

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 0 \quad \therefore x = -1$$

따라서 $x = -1$ 일 때 $f(-1)$ 이 극소이면서 최소가 되므로

$$f(-1) = -a^2 + 4a + 5 = -(a+1)(a-5) > 0$$

$$\therefore -1 < a < 5$$

17. 정답 ①

직선 $\overline{PQ}$ 의 방정식은

$$y = \frac{-4 - (-6)}{2 - 0}(x - 0) - 6 = x - 6$$

기울기가 1 이므로

원에 접하고 기울기가 1인 접선의 접점이 점 R 이 된다

원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 접하고 기울기 1인 접선의 방정식은

$$y = x - \sqrt{2} \sqrt{1+1} = x - 2$$

평행한 두 직선 사이의 거리가 삼각형 PQR 의 높이일 때 면적이 최소가 된다.

$$\text{평행한 두 직선사이의 거리 } h = \frac{|-6 - (-2)|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2-0)^2 + (-6+4)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

18. 정답 ③

$$z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$$

$z-1 = -i$ 이고 양변을 제곱하여 정리하면

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \therefore z^2 - 2z + 3 = (z^2 - 2z + 2) + 1 = 1$$

19. 정답 ②

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + 5 \quad \therefore f(1) = 5$$

$$f(x) = (x-2)^2Q_2(x) + x + 3 \quad \therefore f(2) = 5$$

$R(x) = ax^2 + bx + c$ 라 두면

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x-2)^2\{(x-1)Q(x) + a\} + x + 3 \quad \therefore f(1) = a + 4 = 5$$

$a = 1$ 이므로

$$f(x) = (x-2)^2(x-1)Q(x) + (x-2)^2 + x + 3$$

$$\text{따라서 } R(x) = ax^2 + bx + c = (x-2)^2 + x + 3 = x^2 - 3x + 7$$

$$R(2) = 5$$

20. 정답 ③

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \quad \therefore \text{꼭지점}(2, -1)$$

$$y = -x^2 + 8x - 13 = -(x-4)^2 + 3 \quad \therefore \text{꼭지점}(4, 3)$$

두 곡선이 점 $P(a, b)$ 에 대칭이므로

$$P(a, b) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = (3, 1) \quad a = 3, b = 1$$