2016 경찰 2차 수학 해설지

1번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 방정식과 부등식
★ 난이도	하

★ 풀이

준 식의 양 변을 x로 나누고 이항하면 다음과 같습니다.

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7} \qquad \text{㉠}$$

㉠의 양 변을 제곱하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=5$$

2번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 복소수 i의 주기성
★ 난이도	하

★ 개념

분모의 켤레복소수를 분모분자에 곱하여 실수화하면 식이 간단하게 정리됩니다.

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

★ 풀이

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}=(-i)^{2016}+(i)^{2016}=2$$

3번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 이차함수와 방정식
★ 난이도	하

★ 개념

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 $f(x)=0$의 두 근과 같습니다.

"두 점 사이의 거리 = 두 근의 차이"이므로 다음 공식을 이용합니다.

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

★ 풀이

$y=x^2-x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점사이의 거리는 $x^2-x+k=0$의 두 근의 차이와 같습니다.

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}=\sqrt{1-4k}=\sqrt{5}$$

$\therefore\ k=-1$

4번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 이차함수의 최대최소
★ 난이도	중

★ 개념

식을 치환한 후에는 정의역의 범위가 바뀌는 것에 유의해야 합니다.

★ 풀이

준 식에서 $t=x^2-2x+1$라 치환을 합니다.

$$t=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$-1\le x\le 1$ 이므로 t의 범위는 $0\le t\le 4$가 됩니다.

준 식에 t를 대입하여 정리하면 다음과 같습니다.

$$y=t^2-2t+2\ \ (0\le t\le 4)$$

축의 방정식이 $t=1$이므로

$t=1$에서 최솟값 1

$t=4$에서 최댓값 10을 갖습니다.

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 차이 = 9

5번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학1] 이차함수와 부등식
★ 난이도	중

★ 개념

$f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$에 대하여

1) $f(x)>0$이 항상 성립할 조건 : $a>0,\ D<0$

2) $f(x)\geq 0$이 항상 성립할 조건 : $a>0,\ D\leq 0$

3) $f(x)<0$이 항상 성립할 조건 : $a<0,\ D<0$

4) $f(x)\leq 0$이 항상 성립할 조건 : $a<0,\ D\leq 0$

★ 풀이

$$-x^2-2(m-1)x+(m-3)>0$$

을 만족시키는 실수가 존재하지 않으므로

$$-x^2-2(m-1)x+(m-3)\leq 0$$

이 항상 성립합니다.

$$D/4=(m-1)^2+(m-3)\leq 0$$

$$m^2-m-2\leq 0$$

$$(m-2)(m+1)\leq 0$$

$\therefore\ -1\leq m\leq 2$

6번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학1] 부정방정식
★ 난이도	하

★ 개념

실수 x에 대하여 항상 $x^2\geq 0$을 만족하므로

$x^2+y^2=0$을 만족하는 실수 x, y는 $x=y=0$입니다.

★ 풀이

준 식을 인수분해하면 다음과 같습니다.

$$(2x-y)^2+(x+1)^2=0$$

$2x-y$, $x+1$이 모두 실수 이므로

$2x-y=0$, $x+1=0$ 입니다.

$x=-1$, $y=-2$

$\therefore\ x+y=-3$

7번

★ 정답	④
★ 출제영역	[수학2] 지수와 로그
★ 난이도	중

★ 개념

$\log A$와 $\log B$의 가수가 같으면 A, B의 숫자 배열이 같습니다. 즉, 소숫점의 위치만 다르기 때문에 하나의 수에 10의 거듭제곱수를 곱하면 다른 수가 됩니다. 따라서 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$A\times 10^m=B$$

★ 풀이

$\log x$, $\log\sqrt{x}$의 가수가 같으므로 다음 식이 성립합니다.

$$\sqrt{x}\times 10^m=x\ \ (m\text{은 정수})$$

$$x=10^{2m}\ \ (m\text{은 정수})\ \ ㉠$$

$\log x$의 지표가 2 이므로 x의 범위는 다음과 같습니다.

$$10^2\leq x<10^3\qquad ㉡$$

㉡의 범위에서 ㉠을 만족하는 x를 찾으면

$\therefore\ x=100$

8번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학2] 수열의 합과 일반항
★ 난이도	하

★ 개념

등비수열 $a_n=ar^{n-1}$의 합은 다음과 같습니다.

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}$$

따라서 r^n의 계수와 상수항의 계수가 같습니다.

※ $S_0=0$을 만족하면 수열 $\{a_n\}$이 첫째 항부터 수열을 이룹니다. 등차수열, 등비수열의 경우 모두에 성립합니다.

★ 풀이

첫째항부터 등비수열을 이루기 위해서는 $S_0=0$을 만족해야 합니다.

$$S_0=3+k=0$$

$\therefore\ k=-3$

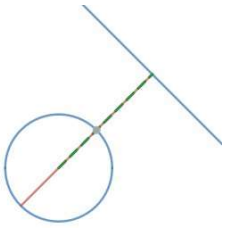
9번

★ 정답	②
★ 출제영역	[수학1] 도형의 방정식
★ 난이도	하

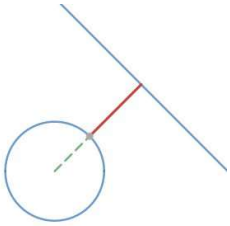
★ 개념

원 위의 한 점에서 직선에 이르는 거리의 최대, 최소는 다음과 같습니다.

1) 최댓값 = "원의 중심에서 직선까지의 거리 + 반지름"



2) 최솟값 = "원의 중심에서 직선까지의 거리 - 반지름"



★ 풀이

준 식을 정리하면 다음과 같습니다.

$$(x-1)^2+(y+1)^2=8$$

따라서 중심이 $(1,\ -1)$ 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원입니다.

원 위의 한 점에서 직선에 이르는 거리의 최솟값은 "원의 중심에서 직선까지의 거리 - 반지름"입니다.

중심에서 직선까지의 거리 = $\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ 3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

10번

★ 정답	①
★ 출제영역	[수학1] 부등식
★ 난이도	하

★ 개념

x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라 할 때

$[x]=n$ 이면 $n\le x<n+1$ 입니다.

★ 풀이

준 식을 인수분해하면 다음과 같습니다.

$$(2[x]-1)([x]-2)<0$$

$$\frac{1}{2}<[x]<2$$

$[x]$는 정수이므로 만족하는 값은 $[x]=1$

$$1\le x<2$$

$\therefore\ \alpha+\beta=3$

11번

★ 정답	③
★ 출제영역	[수학2] 함수 + 수열
★ 난이도	중

★ 개념

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 그래프의 교점의 x좌표는

$f(x)=g(x)$의 해와 같습니다.

★ 풀이

두 식을 연립하면,

$$-\frac{1}{nx}+n=(n-2)x$$

$$-1+n^2x=n(n-2)x^2$$

$$n(n-2)x^2-n^2x+1=0$$

이 방정식의 두 근이 A_n, B_n 이므로 근과계수와의 관계에 의하여 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$A_n\times B_n=\frac{1}{n(n-2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right\}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}A_nB_n&=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

12번

★ 정답	②
★ 출제영역	[미적분1] 합성함수의 극한
★ 난이도	상

★ 개념

$y=f(x)$가 $x=a$에서 연속일 조건은 다음과 같습니다.

1) $x=a$에서 함숫값이 존재 : $f(a)$

2) $x=a$에서 극한값이 존재 : $\lim_{x\to a} f(x)$

극한값이 존재할 조건은 좌극한=우극한 입니다.

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$

3) 함숫값 = 극한값 : $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

★ 풀이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3+2}=1, \qquad g(0)=2$$

에서 $g(x)$는 3차 다항식이고 최고차항의 계수는 1, 상수항이 2임을 알 수 있습니다.

따라서 $g(x)$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있습니다.

$$g(x)=x^3+ax^2+b+2$$

$g(x)$는 실수 전체에서 연속이고 $f(x)$는 $x=0$, 2에서 불연속이므로

$(g\circ f)(x)$가 실수 전체에서 연속이 되기 위해서는

$x=0$, 2에서 연속이어야 합니다.

i) $x=0$에서 연속

1) 함숫값 : $g(f(0))=g(0)=2$

2) 좌극한 : $\lim_{x\to 0-} g(f(x)) = \lim_{t\to 2+} g(t) = 4a+2b+10$

3) 우극한 : $\lim_{x\to 0+} g(f(x)) = \lim_{t\to 2-} g(t) = 4a+2b+10$

$\therefore\ 2a+b=-4$ ㉠

ii) $x=2$에서 연속

1) 함숫값 : $g(f(2))=g(0)=2$

2) 좌극한 : $\lim_{x\to 2-} g(f(x)) = \lim_{t\to 0+} g(t) = 2$

3) 우극한 : $\lim_{x\to 2+} g(f(x)) = \lim_{t\to -2+} g(t) = 4a-2b-6$

$\therefore\ 2a-b=4$

㉠, ㉡에서 $a=0$, $b=-4$이므로

$\therefore\ g(1)=1+a+b+2=-1$

13번

★ 정답	①
★ 출제영역	[미적분1] 미분의 정의, 합성함수의 미분
★ 난이도	중

★ 개념

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

★ 풀이

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h(0)=f(0)g(0)=2$

준식에 대입하면,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)=5$$

$h(x)=f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면,

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=8+g'(0)=5$

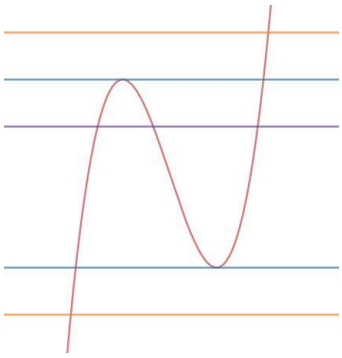
$\therefore\ g'(0)=-3$

14번

★ 정답	②
★ 출제영역	[미적분1] 함수의 극대, 극소
★ 난이도	상

★ 개념

3차 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)=k$의 해의 개수는 $y=f(x)$, $y=k$의 교점의 개수와 같습니다.
따라서 다음 그림처럼 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 해의 개수를 구할 수 있습니다.



1) $k=$극댓값 or 극솟값 : 교점 2개
2) 극솟값 $<k<$ 극댓값 : 교점 3개
3) $k<$극솟값 or $k>$극댓값 : 교점 1개

★ 풀이

$f(x)=x^3-3x^2+x$, $g(x)=3x^3-11x$
에서 $g(x)$를 y축으로 α만큼 평행시켰을 때 $f(x)$와의 교점이 2개이어야 하므로,

$$f(x)=g(x)+\alpha$$

의 해가 2개입니다.

$$x^3-3x^2+x=3x^3-11x+\alpha$$
$$2x^3+3x^2-12x=-\alpha \qquad ㉠$$

㉠의 해가 2개 이므로

$$h(x)=2x^3+3x^2-12x,\ y=-\alpha$$

위의 두 그래프의 교점이 2개입니다.

$$h'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

이므로 극댓값은 $h(-2)=20$, 극솟값은 $h(1)=-7$입니다.
교점이 2개이어야 하므로 $-\alpha=20,\ -7$
$\therefore$ 만족하는 α의 합은 -13

15번

★ 정답	④
★ 출제영역	[미적분1] 정적분의 성질
★ 난이도	상

★ 개념

$f(-x)=f(x)$의 성질 (우함수)
1) x의 짝수차항과 상수항만 존재합니다.
2) $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭입니다.
3) $\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$
4) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

$g(-x)=-g(x)$의 성질 (기함수)
1) x의 홀수차항만 존재합니다.
2) $y=g(x)$의 그래프는 원점 대칭입니다.
3) $\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx$
4) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

※ $f(x)g(x)$는 홀수차항만 존재하므로 기함수입니다.

★ 풀이

$f(x)$는 우함수이므로 홀수차항과 곱하면 기함수입니다.

$$\int_{-1}^{1}(4x^3+5x-2)f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}-2f(x)dx=-12$$

따라서 $\int_{-1}^{1} f(x)=6$

$f(x)=f(x+2)$이므로 주기가 2인 함수입니다.
따라서 $f(x)$는 다음을 만족합니다.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{-1} f(x)dx$$
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{5}^{6} f(x)dx$$

따라서

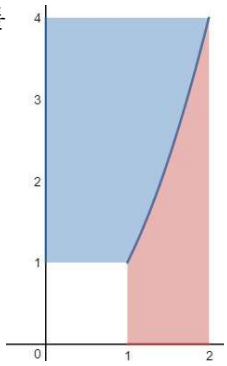
$$\int_{-5}^{6} f(x)=5\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{5}^{6} f(x)dx=33$$

16번

★ 정답	②
★ 출제영역	[미적분1] 역함수와 정적분
★ 난이도	중

★ 개념

예를 들어 $f(x)=x^2$, $f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 다음 그림에서



빨간색으로 칠해진 부분의 넓이는

$\int_1^2 f(x)dx$

파란색으로 칠해진 부분의 넓이는

$\int_1^4 g(x)dx$ 입니다.

빨간색부분과 파란색부분의 넓이의 합은 전체 사각형에서 하얀색 사각형 부분을 뺀 넓이와 같습니다.
이를 이용하여 실제 $g(x)$를 구하지 않고 $g(x)$의 정적분 값을 구할 수 있습니다.

일반적으로 표현하면
$y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라 하고,
$f(a)=c$, $f(b)=d$라 하면,

$$\int_a^b f(x)dx+\int_c^d g(x)dx=bd-ac$$

★ 풀이

$f(x)$, $g(x)$가 역함수이고, $f(1)=1$, $f(2)=10$ 이므로

$$\int_1^2 f(x)dx+\int_1^{10} g(x)=20-1 \quad \text{㉠}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{19}{4} \quad \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의해

$$\therefore \int_1^{10} g(x)dx=\frac{57}{4}$$

17번

★ 정답	①
★ 출제영역	[확률과 통계] 확률
★ 난이도	상

★ 풀이

공역과 치역이 모든 함수의 집합의 개수를 구하고 그 중에 "$x_1<x_2$ 라면 $f(x_1)\le f(x_2)$"를 만족하는 함수의 개수를 구하면 문제의 조건에 맞는 확률을 구할 수 있습니다.

공역과 치역이 같기 위해서는 A의 원소가 B의 모든 원소에 적어도 1번 이상 대응하여야 합니다.
예를 들면 1에 3개, 2에 1개, 3에 1개씩 대응되거나 1에 2개, 2에 2개, 3에 1개씩 대응되면 됩니다.

1) 1에 3개, 2에 1개, 3에 1개씩 대응
1에 대응될 원소 3개를 정하는 방법 : ${}_5C_3=10$가지
3개의 원소는 모두 1에 대응시키면 되지만
남은 2개의 원소를 2, 3에 각각 대응시켜야 하므로 대응시키는 방법의 수는 2가지입니다.
$\therefore\ 10\times 2=20$가지

2) 1에 2개, 2에 2개, 3에 1개씩 대응
1에 대응시킬 원소 2개를 정하는 방법 : ${}_5C_2=10$
2개의 원소는 1에 대응시키고, 남은 3개의 원소 중 3에 대응하는 원소만 정하면 나머지 2개의 원소는 자동으로 2에 대응됩니다. 따라서 3개의 원소중에서 1개의 원소를 정하는 방법이므로 3가지
$\therefore\ 10\times 3=30$

"$x_1<x_2$ 라면 $f(x_1)\le f(x_2)$"를 만족하는 경우는
1)의 20개 중 1개, 2)의 30개 중 1개씩 존재합니다.

$$\therefore\ \frac{2}{50}=\frac{1}{25}$$

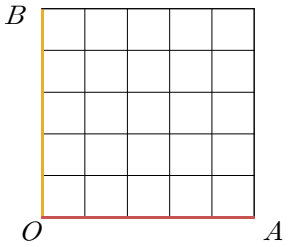
※ 1)의 경우에서 3개가 대응되는 원소를 정하는 방법이 3가지 있으므로 전체 경우는 60가지, 2)의 경우 역시 1개가 대응되는 원소를 정하는 방법이 3가지 있으므로 전체 경우는 90가지이지만 "$x_1<x_2$ 라면 $f(x_1)\le f(x_2)$"조건을 만족하는 원소 역시 같은 비율로 증가하므로 전체 확률은 변함이 없습니다.

18번

★ 정답	③
★ 출제영역	[확률과 통계] 독립시행의 확률
★ 난이도	하

★ 풀이

5번 움직였을 때 O로부터의 길이가 5보다 크거나 같은 점은 2개 존재합니다.



주사위를 던졌을 때 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 각 방향으로 이동할 확률은 다음과 같습니다.

위로 한 칸 이동할 확률 = $\frac{1}{3}$

오른쪽으로 한 칸 이동할 확률 = $\frac{2}{3}$

따라서 A에 도착할 확률 = $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

B에 도착할 확률 = $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

$\therefore\ 1-\frac{32}{243}-\frac{1}{243}=\frac{210}{243}$

19번

★ 정답	④
★ 출제영역	[확률과 통계] 평균과 분산
★ 난이도	하

★ 개념

분산은 다음 공식으로도 구할 수 있습니다.

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

평균과 분산의 기본적인 성질은 다음과 같습니다.

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

★ 풀이

$\sum_{i=1}^{5} z_i = z_1+z_2+\cdots+z_5 = 10$ 이므로

$$E(z_i)=\frac{z_1+\cdots+z_5}{5}=2$$

$\sum_{i=1}^{5} z_i^2 = z_1^2+z_2^2+\cdots+z_5^2 = 100$이므로

$$E(z^2)=\frac{z_1^2+\cdots+z_5^2}{5}=20$$

$$V(z_i)=E(z_i^2)-\{E(z_i)\}^2=16$$

$V(z_i)=V(2x_i-10)=4V(x_i)$ 이므로

$\therefore\ V(x_i)=4$

20번

★ 정답	②
★ 출제영역	[확률과 통계] 이항분포
★ 난이도	중

★ 풀이

빨간색 공을 x회 뽑는다면 파란색 공은 $150-x$회를 뽑게 되므로 얻는 점수는 다음과 같습니다.

$$3x-2(150-x)=5x-300$$

180점 이상을 획득하기 위해서는

$$5x-300>180$$

$$x>96$$

빨간색 공을 뽑고 다시 주머니에 집어넣기 때문에 이전 시행이 다음 시행에 영향을 주지 않으므로 독립시행입니다.

따라서 150번을 시행하면 그 결과는 $B\left(150,\ \frac{3}{5}\right)$인 이항분포를 따릅니다.

$$m=150\times\frac{3}{5}=90$$

$$\sigma^2=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$$

이므로 근사적으로 $N(90,\ 6^2)$인 정규분포를 따릅니다.

$$\begin{aligned}P(x\geq 96)&=P\left(z\geq\frac{96-90}{6}\right)\\&=P(z\geq 1)\\&=0.5-P(0\leq z\leq 1)\\&=0.16\end{aligned}$$