

수 학

문 1. 정적분 $\int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx$ 의 값은?

- ① $\frac{4}{3}$
 ② 2
 ③ $\frac{8}{3}$
 ④ $\frac{10}{3}$

정답
해설

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \\ &= -2 \times \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

문 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 3}{2n + 5} = 3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① 2
 ② 4
 ③ 6
 ④ 8

정답
해설

③
 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 이므로 분모 분자 n 으로 나눈다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \frac{2}{n}}{2 + \frac{5}{n}} \Rightarrow a \neq \text{이면 발산}$$

$a = 0$ 이면 $\frac{b}{2}$ 로 수렴

$$\frac{b}{2} = 3$$

$$\therefore a = 0 \quad b = 6$$

문 3. 등식 $(x+1)\left(x + \frac{1-i}{1+i}\right) = 2 + y\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 를 만족하는 실수

x, y 에 대하여 xy 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 1
 ② 2
 ③ 3
 ④ 6

정답
해설

②

$\frac{1-i}{1+i}$ 를 유리화 하면 $-i$

$$(x+1)(x-i) = 2 + y(-i)$$

$$x^2 + x - (x+1)i = 2 - yi$$

$$x^2 + x = 2 \quad x+1 = y$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \therefore xy = 2$$

문 4. 좌표평면 위의 점 $A(1, 3)$ 을 지나는 직선이

원 $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ 과 접하는 점을 T 라 할 때, $\overline{AT}$ 의 길이는?

- ① $\frac{5}{2}$
 ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
 ③ 5
 ④ $5\sqrt{2}$

정답
해설

③

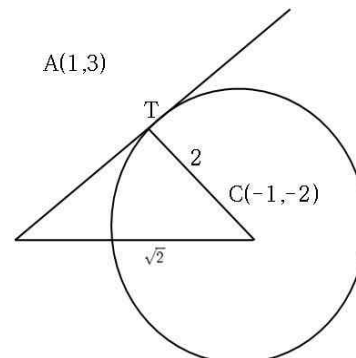
$A(1, 3)$ 을 지나는 직선

$$y = m(x-1) + 3 \rightarrow mx - y - m + 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

중심이 $(-1, -2)$ 반지름 2 이므로



$$\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$\overline{AT}^2 = (\sqrt{29}^2 - 2^2) = 25$$

문 5. 어느 고등학교에서는 전체 학생의 20%가 자전거를 타고 등교한다고 한다. 이 학교 학생 중 100명을 임의로 뽑아 등교 수단을 조사할 때, 자전거를 타고 등교하는 학생의 수를 확률변수 X 라 하자. X 의 표준편차는?

- ① 4
 ② 10
 ③ 16
 ④ 20

정답
해설

①

이항분포

$$B(100, 0.2)$$

$$E(x) = 100 \times 0.2 = 20$$

$$V(x) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$$

$$\therefore \gamma(x) = 4$$

문 6. 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합이 8일 때, 이차방정식 $f(3x-2)=0$ 의 두 근의 합은?

- ① 1
② 2
③ 3
④ 4

정답 ④
해설

$$f(x)=0 \quad f(B)=0 \text{이고}$$

$$x+B=8$$

$$f(3x-2)=0 \text{에서}$$

$$3x-2=a \text{이거나 } B$$

$$\therefore x = \frac{a+2}{3} \text{ or } \frac{B+2}{3}$$

$$\therefore \text{두근의 합} = \frac{a+B+4}{3} = \frac{8+4}{3} = 4$$

문 7. 두 집합 A, B 는 공집합이 아니고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

(나) A 와 B 는 서로소이다.

두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- ① 29
② 30
③ 31
④ 32

정답 ②
해설

서로소 이면 교집합은 존재하지 않는다.

집합A가 결정되면 집합B는 자동 결정 되므로

집합A는 $A \cup B$ 의 부분집합

$$2^5 = 32 \text{에서 } AB \text{는 공집합이 아니므로 } 2 \text{가지를 빼면}$$

$$32-2=30$$

문 8. 두 조건

$$p: |x-2| < 1, \quad q: x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 최댓값은? (단, $a < 0$)

- ① -1
② -2
③ -3
④ -4

정답 ③
해설

$$P: -1 < x-2 < 1$$

$$-1 < x < 3$$

$$g: x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$$

$$(x-3a)(x+a) < 0$$

$$a < 0 \text{이므로}$$

$$3a < x < -a$$

p 가 q 이기 위한 충분조건 이므로

$$3a \leq 1 \quad 3 \leq -a$$

$$a \leq \frac{1}{3} \quad a \leq -3$$

$$\therefore a \leq 3$$

$$\therefore a \text{의 최댓값은 } -3$$

문 9. 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나오면 동쪽으로 1m 직진하고, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 북쪽으로 1m 직진한다고 하자. 이 규칙에 따라 주사위를 던지는 시행을 4회 반복할 때, 처음 위치로부터 거리가 3m 이하일 확률은?

- ① $\frac{5}{27}$
② $\frac{2}{9}$
③ $\frac{7}{27}$
④ $\frac{8}{27}$

정답 ④
해설

거리가 3m이하는 3의배수가 2번 3의 배수가 아닌수 2번 밖에 없다.

독립시행이고 3의배수의 확률은 $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 4C_2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

문 10. 두 함수

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+k \quad g(x)=x^3-x^2+3$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수는?

- ① 1
② 2
③ 3
④ 4

정답 ②
해설

$$f(x)-g(x)=0 \text{이라 두면}$$

$$f(x)-g(x)=h(x)$$

$$h(x)=x^4+2x^2+k-3$$

$(0,1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사이값 정리에 의해

$$h(0) \times h(1) < 0$$

$$\Rightarrow k(k-3) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 3 \text{ 정수의 개수는 2개이다.}$$

문 11. 등식 $x^4 + ax + b = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})P(x) + \sqrt{6}$ 이 x 에 대한 항등식일 때 상수 a 의 값은? (단, b 는 상수, $P(x)$ 는 다항식)

- ① $-5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
 ② $-5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 ③ $5(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 ④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

정답 ②
 해설

$$\begin{aligned} i) x = -\sqrt{2} \text{ 대입 } \quad ii) x = \sqrt{3} \text{ 대입} \\ 4 - \sqrt{2}a + b = \sqrt{6} - \textcircled{1} \quad P + \sqrt{3}a + b = \sqrt{6} - \textcircled{2} \\ \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad -5 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})a = 0 \\ a = \frac{5(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(-\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \\ = 5(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ \therefore a = -5(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

문 12. 두 함수 f 와 g 는 모두 역함수가 존재하고 $f(2x+1) = g(x+3)$ 이다. $f^{-1}(5) = 3$ 일 때, $g^{-1}(5)$ 의 값은?

- ① 1
 ② 2
 ③ 3
 ④ 4

정답 ④
 해설

$$\begin{aligned} f^{-1}(5) = 3 \rightarrow f(3) = 5 \\ g^{-1}(5) = k \rightarrow g(k) = 5 \\ f(2x+1) = g(x+3) \\ f(3) = g(4) = 5 \\ \therefore k = 4 \end{aligned}$$

문 13. 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f(x) = ax + 1$ ($0 \leq x \leq 2$)일 때, 상수 a 의 값은?

- ① -1
 ② $-\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{1}{2}$
 ④ 1

정답 ②
 해설

$$\begin{aligned} \text{모든 확률의 답은 1이다} \\ \int_0^2 (ax + 1)dx = 1 \\ \left[\frac{a}{2}x^2 + x \right]_0^2 = 2a + 2 = 1 \\ \therefore a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

문 14. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 1$, $y = -2$ 이고 $f(2) = 3$ 이다. 상수 a , b , c 의 곱 abc 의 값은?

- ① 14
 ② 16
 ③ 18
 ④ 20

정답 ①
 해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a(x+c) - ac + b}{x+c} \\ &= \frac{-ac+b}{x+c} + a \\ \text{점근선 : } x &= -c \quad y = a \\ \therefore c &= -1 \quad a = -2 \\ f(x) &= \frac{-2x+b}{x-1} \rightarrow f(2) = 3 \text{ 이므로} \\ f(2) &= \frac{b-4}{2-1} = 3 \quad b = 7 \\ a &= -2 \quad b = 7 \quad c = -1 \\ \therefore abc &= 14 \end{aligned}$$

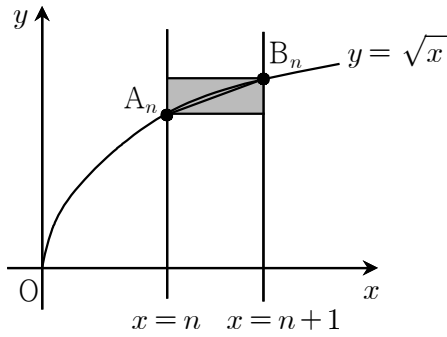
문 15. $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$ 라 할 때 $\log_{15} 80$ 을 a , b 로 바르게 나타낸 것은?

- ① $\frac{2+b}{a+b}$
 ② $\frac{4+a}{b+ab}$
 ③ $\frac{4+b}{a+ab}$
 ④ $\frac{4+ab}{a+ab}$

정답 ④
 해설

$$\begin{aligned} \log_3^2 = \frac{1}{a} \quad \log_3^5 = b \\ \text{밑변환 공식을 이용하여} \\ \log_{15}^{80} &= \frac{\log_3 80}{\log_3 15} \\ &= \frac{\log_3 2^4 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 5} \\ &= \frac{4\log_3 2 + \log_3 5}{1 + \log_3 5} \\ &= \frac{\frac{4}{a} \pm b}{1+b} = \frac{ab+4}{ab+a} \end{aligned}$$

문 16. 자연수 n 에 대하여 두 직선 $x = n$, $x = n+1$ 이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점을 각각 A_n , B_n 이라 하자. 그림과 같이 선분 $A_n B_n$ 을 대각선으로 하고 변이 축에 평행한 직사각형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{99} S_n$ 의 값은?



- ① 9
② 10
③ 11
④ 12

정답
해설

①

S_n 의 가로는 1 세로는 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{PP}{2} S_n = \frac{PP}{2} (-\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$$

$$n=1 \quad n=1$$

$$= (-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (-\sqrt{3} + \sqrt{4}) + \dots + (-\sqrt{99} + \sqrt{100})$$

$$\Rightarrow 10 - 1 = P$$

문 17. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x) = px^2 - 2x + q$ 의 최솟값이 1일 때, 상수 p, q 의 합 $p + q$ 의 값은? (단, $0 < p < 1$)

- ① 3
② $\frac{7}{2}$
③ 4
④ $\frac{9}{2}$

정답
해설

①

$$f(x) = P(x^2 - \frac{2}{p}x + \frac{1}{p^2}) + g - \frac{1}{p}$$

$$= P(x - \frac{1}{p})^2 + g - \frac{1}{p}$$

$$\text{꼭지점}(\frac{1}{p}, g - \frac{1}{p})$$

$$0 < P < 1 \text{ 이므로 } \frac{1}{p} > 1 \text{ 이다.}$$

$$x=0 \text{ 최대 } x=1 \text{에서 최소를 가진다.}$$

$$f(1) = p - 2 + g = 1$$

$$\therefore p + g = 3$$

문 18. 함수 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2ax^2$ 이 극댓값을 갖지 않을 때, 정수 a 의 최솟값은?

- ① -3
② -2
③ 2
④ 3

정답
해설

④

극대값을 갖지 않으면 $f'(x)$ 가 서로 다른 세 실근을 가지

면 안된다.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4ax$$

$$= 4x(x^2 - 3x + a)$$

$$x^2 - 3x + a \text{가 근이 없거나 중근}$$

$$D: P - 4a \leq 0 \text{ or } x=0 \text{이 중근}$$

$$a \geq \frac{p}{4}$$

문 19. 어느 학급 학생을 대상으로 세 영화 A, B, C의 관람 여부를 조사하였더니 A 영화를 관람한 학생이 10명, B 영화를 관람한 학생이 9명, C 영화를 관람한 학생이 11명이고, 이 중 A와 B 두 영화만 관람한 학생이 2명, 세 영화를 모두 관람한 학생이 5명이었다. C 영화만 관람한 학생의 수의 최솟값은?

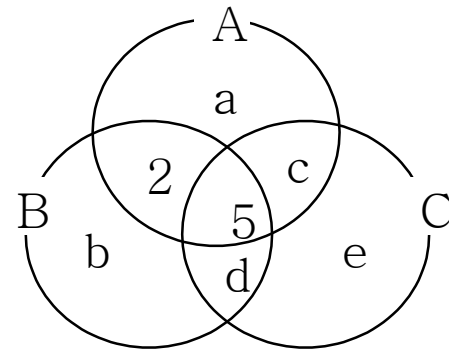
- ① 1
② 2
③ 3
④ 4

정답
해설

①

$$n(A) = 10 \quad n(B) = P \quad n(C) = 11$$

$$n(A \cap B \cap C) = 5 \quad \text{A와 B만 본 학생 2명}$$



e의 최솟값은 c+d가 최대일 때 이므로 a=0이고 b=0일 때 c=3이 되고 d=2가 된다.

$n(c) = 11$ 이므로 최소 'e'의 값은 '1'

문 20. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 다음과 같다.

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, b_2 = 2, (b_{n+1})^2 = b_n b_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

10이하인 두 자연수 m, n 에 대하여 $a_m + b_n$ 이 3의 배수인 순서쌍 (a_m, b_n) 의 개수는?

- ① 30
② 35
③ 40
④ 45

정답
해설

②

$$a_n = \text{공차가 4인 등차수열}$$

$$b_n = \text{공비가 2인 등비수열}$$

$$b_n = 2^{n-1}$$

$$a_n + b_n = 4m - 3 + 2^{n-1}$$

$$m = 1 \rightarrow 1 + 2^{n-1} \quad n = 2, 4, 6, 8, 10$$

$$m = 2 \rightarrow 5 + 2^{n-1} \quad n = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$m = 3 \rightarrow 9 + 2^{n-1} \quad n = 0$$

⋮

m이 3의 배수 일때는 n의 값이 없고 나머지는 5개씩 있으므로 $7 \times 5 = 35$