번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
정답	①	②	②	②	④	②	①	④	③	②	④	②	③	①	④	③	①	①	②	④

해설

1. $\begin{cases} 7-xy=x^2 \\ 2x+2y=7 \end{cases}$ 에서 $x+y=\dfrac{7}{2}$이고

$7-xy=x^2$에서 $x(x+y)=7$이므로

대입하여 정리하면 $x=2,\ y=\dfrac{3}{2}$

따라서 $x-y$의 값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답: ①

2. $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\geq -1) \\ x^2+2x+3 & (x<-1) \end{cases}$

$x\geq -1$ 구간에서의 치역은 $y\leq 2$ 이고

$x<1$ 구간에서의 치역은 $y>2$ 이다.

따라서 두 번째 식에 대입해서 k값을 구한다

$f^{-1}(6)=k$라 하면 $f(k)=6$ 이므로

$k^2+2k+3=6 \quad \therefore k=1 \text{ or } k=-3$

이때 $k<-1$이므로 $k=-3$

$f(-3)=6$이므로

$f^{-1}(6)=-3,\ f(6)=-5$

$\therefore f^{-1}(6)+f(6)=-8$

답: ②

3. $\displaystyle\sum_{x=-1}^{3} P(X=x)=1$이므로 $a+\dfrac{1}{12}+b+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=1 \quad \cdots$ ①

$E(X)=-a+b+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1 \quad \cdots$ ②

①과 ②을 연립하면 $a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{1}{4}$

$E(X^2)=3$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=3-1^2=2$

답: ②

4. $\sum_{k=1}^{2019} ka_{k+1} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 2019a_{2020} = 26$

$\sum_{k=1}^{2019} (k+1)a_k = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots + 2020a_{2019} = 47$

아래의 식에서 위의 식을 빼면

$\sum_{k=1}^{2019} (k+1)a_k - \sum_{k=1}^{2019} ka_{k+1} = 2\sum_{k=1}^{2019} a_k - 2019 \times a_{2020} = 21$

$a_{2020} = \frac{1}{2019}$을 만족시키므로, $\sum_{k=1}^{2019} a_k$에 대해 정리하면 $\sum_{k=1}^{2019} a_k = 11$

답: ②

5. $0 \le a \le b < c < 12$ 를 만족하는 순서쌍의 개수는 $0 \le a \le b < c \le 11$를 만족하는 순서쌍의 개수와 같다.

따라서 구하고자 하는 순서쌍의 개수는 $0 \le a \le b \le c \le 11$을 만족하는 순서쌍에서 $0 \le a \le b = c \le 11$을 만족하는 순서쌍을 뺀 값이다.

이때 $0 \le a \le b = c \le 11$를 만족하는 순서쌍은 $0 \le a \le b \le 11$를 만족하는 순서쌍의 개수와 같다.

$\therefore {}_{12}H_3 - {}_{12}H_2 = 364 - 78 = 286$

답: ④

6. p가 q이기 위한 필요조건이 되기 위해선 'q이면 p이다'가 성립해야 한다.

q: $|x-a| \le 2$ 에서 $-2+a \le x \le 2+a$ 이고

p: $x^2 - x - 12 \le 0$ 에서 $-3 \le x \le 4$ 이므로

$q \rightarrow p$가 성립하기 위한 실수 a값은 $-1 \le a \le 2$이다.

답: ②

7. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3,\ f(2) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h) - f(2-2h)}{2h}$

$= \frac{3}{2} \times \lim_{h \to 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(2-2h) - f(2)}{-2h}$

$=\frac{5}{2}f'(2)=\frac{5}{2}\times 6$

답: ①

8. $(f\circ f)(x)=x$ 이므로 $x=5$를 대입하면
$f(f(5))=f(2)=5$
따라서 (5,2) (2,5)를 지나는 직선이므로 $f(x)=-x+7$ $\therefore a=-6$

다른풀이: (가) 조건에 의해 $f(5)=2$이므로 $f(x)=m(x-5)+2$라 하면
$(f\circ f)(2)$을 구하면 $-3m^2-3m+2$이고
(나) 조건에 의해 $(f\circ f)(2)=2$이다.
따라서 $-3m^2-3m+2=2$이고 $m=-1$이다. $(m\neq 0)$
$\therefore f(x)=-x+7,\ f(a)=-a+7=13$
따라서 $a=-6$이다.

답: ④

9. $F(0)=0,\ F(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3$
$F'(x)=f(x)$은 구간 $[0,\ 2)$에서 음의 값을 가지고 구간 $(2,\ 3]$에서 양의 값을 가지므로 $x=2$일 때, $F(x)$가 최솟값을 가진다. $\therefore m=-\frac{4}{3}$
최댓값을 구하기 위해 $F(0)$와 $F(3)$을 비교하면 $F(0)=0\leq F(3)=\frac{9}{4}$
따라서 $M=\frac{9}{4}$
$\therefore\ Mm=-\frac{4}{3}\times\frac{9}{4}=-3$

답: ③

10.
ㄱ. 기울기가 0보다 크므로 속도는 증가한다.
ㄴ. $t=2$에서 $v(t)=2>0$이므로 운동 방향은 일정하다.
ㄷ. $t>2$에서 점 P의 가속도 함수는 $v'(t)=2t-6$ 이고, 이때 $v'(3)=0$이므로 $t=3$에서 가속도는 0이다.
답) ㄱ, ㄴ, ㄷ

답: ②

11. $\log_a 16=\log_a 2^4=\frac{1}{3}$ $\therefore \log_2 a=12,$

$\log_8 b = \frac{1}{3}log_2 b = \frac{4}{9} \quad \therefore \log_2 b = \frac{4}{3}$

두식을 나누면 $\frac{\log_2 a}{\log_2 b} = 9 \ \therefore \log_b a = 9$

$\log_{\sqrt{b}} a^2 = \frac{2\log a}{\frac{1}{2}\log b} = 4\log_b a = 4 \times 9 = 36$

답: ④

12. 점 P를 $P(\alpha, \alpha+2)$라 하고 점 Q를 $Q(\beta, \beta+2)$라 할 때
선분 PQ의 길이는 $\sqrt{2}|\beta-\alpha|$이다.
$-x^2+2x+3 = x+2$의 두 근이 α, β와 같으므로
$x^2-x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$이다.
$\therefore |\beta-\alpha| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \sqrt{5}$, $\overline{PQ} = \sqrt{2}|\beta-\alpha| = \sqrt{10}$

답: ②

13. $f(x) = 2x^2-4ax+2a = 2(x-a)^2-2a^2+2a$
i) $a < 0$일 때
$f(x)$은 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. $f(0) = 2a = -12$, $a = -6$

ii) $0 \le a \le 2$일 때
$f(x)$은 $x=a$에서 최솟값을 갖는다. $f(a) = 2a^2-4a^2+2a = -12$, a의 값이 존재하지 않는다.

iii) $a > 2$일 때
$f(x)$은 $x=2$에서 최솟값을 갖는다. $f(2) = 8-6a = -12$, $a = \frac{10}{3}$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-\frac{8}{3}$

답: ③

14. 선분 AB를 2:1로 내분하는 점은 $P(\frac{2a-1}{3}, -2)$이고, 이 점이 원 $x^2+y^2=13$의 내부에 있으므로 $(\frac{2a-1}{3})^2+(-2)^2 \le 13$이다. 이를 정리하면 $-4 \le a \le 5$.

따라서, 정수 a의 개수는 10개이다.

답: ①

15. $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$이므로

$g(x)=\begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -x & (0 \leq x<1) \end{cases}$

$t<1$일 때, $\int_0^t g(x)dx=\int_0^t (-x)dx$이므로 $\int_0^t g(x)dx=0$을 만족하지 않는다.

$$t \geq 1\text{일 때, } \int_0^t g(x)dx=\int_0^1 (-x)dx+\int_1^t (x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^t$$

$$=-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}t^2-2t-\frac{1}{2}+2=0$$

정리하여 t의 값을 구하면 $2+\sqrt{2}$

답: ④

16.

$A=\{x|x\text{는 }3\text{의 배수}\}$, $B=\{x|x\text{는 }4\text{의 배수}\}$,

$A\cap B=\{x|x\text{는 }12\text{의 배수}\}$

에서 $A\cap B^C=A-A\cap B$ 이므로

집합 $A\cap B^C$은 50이하의 자연수 중 3의 배수이면서 12의 배수가 아닌 원소들의 집합이다.

A의 모든 원소의 합은 $3\times(1+2+3+\cdots+16)=3\times\frac{16\times17}{2}=408$

$A\cap B$의 모든 원소의 합은 $3\times(4+8+12+16)=120$

따라서 집합 $A\cap B^C$모든 원소의 합은 $408-120=288$이다.

답: ③

17. $(a_7+a_1)(a_7-a_1)=36$

$a_7=a_1+6d$

$a_7-a_1=6d=18 \quad \therefore d=3$

$(a_7+a_1)\times18=36 \quad \therefore a_7+a_1=2$

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7\times2}{2}=7$$

다른풀이) $a_n=a+3(n-1)$이라 하면

$a_7{}^2 - a_1{}^2 = (a+18)^2 - a^2 = 36a + 324 = 36$

$a = -8$

이를 다시 대입하면 $a_n = -11 + 3n$

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{7} (-11+3k) = -77 + 3\sum_{k=1}^{7} k = 7$$

답: ①

18. 임의로 뽑은 900명의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p} = \dfrac{600}{900} = \dfrac{2}{3}$

따라서 예약자 중 체험학습장에 입장한 사람의 비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\frac{2}{3} - 2.5 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{900}} \le p \le \frac{2}{3} + 2.5 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{900}}$$

$$a = \frac{2}{3} - 2.5 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{900}} = \frac{2}{3} - 2.5 \times \frac{\sqrt{2}}{90}$$

$$b = \frac{2}{3} + 2.5 \times \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{900}} = \frac{2}{3} + 2.5 \times \frac{\sqrt{2}}{90}$$

$$b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = \frac{4}{3} \times \left(5 \times \frac{\sqrt{2}}{90}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{27}$$

답: ①

19. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2} f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n} f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 2x f(1+2x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2x(4x^2 + 4x + 1)\,dx$$

$$= \int_0^1 (8x^3 + 8x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \left[2x^4 + \frac{8}{3}x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$= 2 + \frac{8}{3} + 1$$

$$=\frac{17}{3}$$

답: ②

20. 자연수 n에 대하여 수열 $a_{2n-1}=4,\ a_{2n}=6$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{2n-1}}{2^{2n-1}}+\frac{a_{2n}}{3^{2n}}\right)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n}}=4\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+6\times\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{41}{12}$$

답: ④