1번

★ 정답	②

★ 개념

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$라 하면
두 벡터의 내적은 다음과 같습니다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \times |b| \times \cos\theta$$

★ 풀이

$\overrightarrow{AB} = (1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0,\ 2,\ 2)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 = \sqrt{2} \times \sqrt{8} \times \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$

2번

★ 정답	④

★ 풀이

이차함수를 표준형으로 바꾸면 다음과 같습니다.

$$y = (x-2)^2 - 2$$

축이 정의역에 포함되므로

$x = 2$에서 최솟값 -2

$x = -1$에서 최댓값 7

$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 차이는 9

3번

★ 정답	④

★ 풀이

이차함수를 표준형으로 바꾸면 다음과 같습니다.

$$f(x) = (x-2)^2 + a - 4$$

y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면,

$$f(x) = (x-2)^2 + a - 4 - 5$$

이 이차함수가 x축에 접하므로

$\therefore\ a = 9$

4번

★ 정답	④

★ 개념

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 $(x,\ y) = (0,\ 0)$의 해를 갖습니다.
따라서 $ad - bc = 0$을 만족하면 이 연립방정식은 무수히 많은 해를 갖습니다.
즉, $(0,\ 0)$이외의 해를 갖게 됩니다.

★ 풀이

$a(a+3) + (a-1) = 0$

$a^2 + 4a - 1 = 0$

$\therefore$ 모든 a의 값의 합은 -4

5번

★ 정답	③

★ 풀이

준식에서 $2^x = t$라 치환하면

$$t^2 - 9t + 20 = 0$$

이 방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면

$$t_1 \times t_2 = 20$$

방정식 $4^x - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$의 두 근을 α, β라 하면,

$$t_1 = 2^\alpha,\ t_2 = 2^\beta$$

$\therefore\ t_1 \times t_2 = 2^{\alpha+\beta} = 20$

6번

★ 정답	②

★ 풀이

$$f(x) = \sum_{n=0}^{10} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$$

이 다항식을 $x-1$로 나눈 나머지는 $f(1) = 7$

이 다항식을 $x+1$로 나눈 나머지는 $f(-1) = 3$

$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10} = 7$ ㉠

$f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots - a_9 + a_{10} = 3$ ㉡

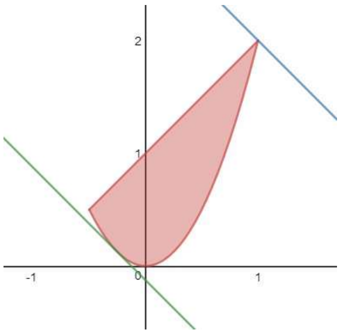
$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 2$

7번

★ 정답	④

★ 풀이

부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같습니다.



$x+y=k$라고 하면 $y=-x+k$ 이므로
기울기가 -1직선이 영역과 만나게 하는 k값 중
가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값입니다.

1) 최댓값

$y=2x^2$, $y=x+1$의 교점 중 1사분면에 있는 $(1,\ 2)$를 지날 때의 k값 $k=3$

2) 최솟값

$y=2x^2$, $y=x+1$가 접할 때의 k값
$2x^2=-x+k$이 중근을 가져야하므로
$D=1-8k=0$

$k=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ \ 3+\dfrac{1}{8}=\dfrac{25}{8}$

8번

★ 정답	③

★ 풀이

$A=\sqrt{39}=39^{\frac{1}{2}}$

$B=10^{\frac{5}{6}}$

$C=\dfrac{11}{4-\sqrt{5}}=4+\sqrt{5}$

$A=39^{\frac{1}{2}}=39^{\frac{3}{6}}=(39^3)^{\frac{1}{6}}$

$B=10^{\frac{5}{6}}=(10^5)^{\frac{1}{6}}$

$39^3<10^5$ 이므로 $A<B$

$A^2=39$

$C^2=(4+\sqrt{5})^2=21+8\sqrt{5}$

$A^2-C^2=28-8\sqrt{5}>0$ 이므로 $A>C$

$\therefore\ \ C<A<B$

9번

★ 정답	②
★ 출제영역	[미적분1] 적분
★ 난이도	중

★ 풀이

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{2n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\sqrt{2x}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

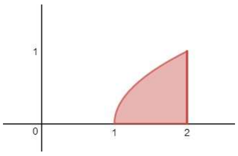
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$\therefore\ \ \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

10번

★ 정답	③

★ 풀이



위의 영역을 y축의 둘레로 회전시킬 때 회전체의 부피는 $x=2$가 만드는 도형(원기둥)의 부피에서 $y=\sqrt{x-1}$이 만드는 도형의 부피를 뺀 값이다.

원기둥의 부피 = 4π

$y=\sqrt{x-1}$이 만드는 도형의 부피 = $\pi\int_0^1 x^2\,dy$

$x^2=(y^2+1)^2$이므로 위의 정적분의 식에 대입하여 계산하면, $\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)$

$\therefore\ 4\pi-\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)\pi=\frac{32}{15}\pi$

11번

★ 정답	③

★ 풀이

$a_n+a_{n+1}=10$이고 $a_1=4$ 이므로 $a_2=6$

$a_2=6$ 이므로 $a_3=4$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_n=500$

12번

★ 정답	①

★ 풀이

원의 중심을 O, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

삼각형 AOM은 직각삼각형입니다.

원의 반지름 $\overline{OA}=2$

원의 중심과 직선 사이의 거리 $\overline{OM}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\overline{AM}=\sqrt{2^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{2}$

13번

★ 정답	②

★ 개념

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$

n항까지의 합의 극한이 무한급수의 값입니다.

★ 풀이

$a_1=\frac{2}{1}-\frac{3}{3}$

$a_2=\frac{3}{3}-\frac{4}{5}$

$a_3=\frac{4}{5}-\frac{5}{7}$

$\cdots$

$a_n=\frac{n+1}{2n-1}-\frac{n+2}{2n+1}$

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{2}{1}-\frac{n+2}{2n+1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{n} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{2n+1}\right)=\frac{3}{2}$

14번

★ 정답	③

★ 풀이

각 변에 상용로그를 취하고 정리하면 다음과 같습니다.

$m+\log(a-1)<100\cdot\log2+\log3<m+\log a$

$m+\log(a-1)<30.5771<m+\log a$ ㉠

$0<\log a<1$ 이므로, $m=30$

㉠의 각 항에 -30을 더하고 부등식을 나누어 정리하면 다음과 같습니다.

$\log(a-1)<0.5771,\ 0.5771<\log a$

$\therefore\ a=4$

15번

★ 정답	①

★ 풀이

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (3x^2+b)dx = 2\int_{0}^{1}(3x^2+b)dx = -2$$

$\therefore\ b=-2$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} (5x^4+ax^2)dx = 2\int_{0}^{1}(5x^4+ax^2)dx = 2$$

$\therefore a=0$

16번

★ 정답	④

★ 풀이

양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같습니다.

$$f'(x)=3x^2+2f'(1)x+1$$

$x=1$을 대입하여 정리하면 $f'(1)=-4$

$\therefore\ f(-1)=-6$

17번

★ 정답	③

★ 풀이

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ 이므로 준식은

$$6(1-\cos^2\theta)=5\cos\theta$$
$$6\cos^2\theta+5\cos\theta-6=0$$
$$(2\cos\theta+3)(3\cos\theta-2)=0$$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$의 구간에서 $\cos\theta>0$ 이므로 $\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$의 구간에서 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$입니다.

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore\ \tan\theta<\sin\theta<\cos\theta$

18번

★ 정답	②

★ 풀이

$x\to1$일 때 분모가 0이므로 분자도 0입니다.

$\therefore\ a=8$

분자를 유리화하면,

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+8}+3)}=-\frac{1}{12}=b$$

$\therefore\ ab=-\frac{2}{3}$

19번

★ 정답	①

★ 풀이

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+a\right)dx=1$$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

$$P(0\le X\le 3a)=P(0\le X\le 1)$$

확률밀도함수 $f(x)$가 $x=0$ 대칭이므로

$P(-1\le X\le 0)=P(0\le X\le 1)$ 입니다.

$\therefore\ P(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}$

20번

★ 정답	①

★ 풀이

$$P(X\ge 660)=P\left(Z\ge\frac{660-620}{50}\right)=P(Z\ge 0.8)=0.21$$