15. 2. 14. 경찰 1차 수학 정답 및 해설

- 남부고시 유상현 수학연구소 -

1. ①

$(g \circ f)(x) = x$ 이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이다.

따라서 $g(5) = k$라 하면 $f(k) = 5$ 이다.

$3k - 1 = 5$

$k = 2$

$\therefore\ g(5) = 2$

2. ④

$f(x) = (x-1)Q(x) + 3$ ㉠

$Q(x) = (x+1)Q_2(x) - 2$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x) = (x-1)\{(x+1)Q_2(x) - 2\} + 3$

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 $f(-1)$이므로

양번에 -1을 대입하면

$\therefore\ f(-1) = (-2)(-2) + 3 = 7$

3. ②

회	1	2	3	4	5	6
점수	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

5회까지의 평균 : $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 83$

따라서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 415$ ㉠

6회까지의 평균 : $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6}$

6회까지의 평균이 85점 이상이어야 하므로

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} \geq 85$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \geq 510$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\therefore\ a_6 \geq 95$

4. ①

$2x + y = 5$ ㉠

이므로 산술기하평균의 관계에 의하여,

$2x + y \geq 2\sqrt{2xy}$

$5 \geq 2\sqrt{2xy}$ ㉡

$\sqrt{2x} + \sqrt{y} = k$라 하고 양변을 제곱하면,

$2x + y + 2\sqrt{2xy} = k^2$ ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$k^2 = 2x + y + 2\sqrt{2xy} \leq 10$

$k \leq 10$

$\therefore\ \sqrt{2x} + \sqrt{y}$의 최댓값은 $\sqrt{10}$

5. ①

$x^3 = 1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3 = 1$ ㉠

$x^3 = 1$을 인수분해하면 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$이므로

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$$\begin{aligned} & 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \cdots + \omega^{2014} + \omega^{2015} \\ = & \ 1 + \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \cdots \omega + \omega^2 \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

6. ③

주어진 식을 인수분해하면

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

따라서 세 근은 1, 2, 3이다.

순서대로 α, β, γ라 하면

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma} \\ = & \ \frac{3 \times 5 \times 4}{6} \\ = & \ 10 \end{aligned}$$

7. ①

$x=\log_{10}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 의 이중근호를 풀면

$x=\log_{10}(\sqrt{3}-1)$

$$
\begin{aligned}
&10^x+10^{-x}\\
&=(\sqrt{3}-1)+\frac{1}{\sqrt{3}-1}\\
&=\sqrt{3}-1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\
&=\frac{3\sqrt{3}-1}{2}
\end{aligned}
$$

8. ③

$\log_3 x+\log_3 y=2$

$\log_3 xy=2$

$xy=9$

산술기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ \geq\ 2\sqrt{x^2y^2}=18$

9. ④

㉠ $AB-AC=0,\ A(B-C)=0$

두 행렬이 모두 영행렬이 아니어도 곱이 영행렬이 될 수 있다. (거짓)

㉡ "$(A-E)^2\neq 0$ 이면 $A\neq E$ 이다." 의 대우는

"$A=E$ 이면 $(A-E)^2=0$ 이다."

대우가 참이므로 원래 명제도 참 (참)

㉢ $B=kA+E$를 $AB=BA$에 대입하면

$A(kA+E)=(kA+E)A$

$kA^2+A=kA^2+A$ (참)

10. ③

$S_n=n^2+3n+2$

$a_1=S_1=6$

$a_7=S_7-S_6=(49+21+2)-(36+18+2)=16$

$\therefore a_1+a_7=22$

11. ④

$a_1=1,\ a_2=2$

$a_{n+1}\cdot a_{n-1}=a_n$에 2부터 대입하면

$n=2$: $a_3\cdot a_1=a_2$ $\quad\therefore\ a_3=2$

$n=3$: $a_4\cdot a_2=a_3$ $\quad\therefore\ a_4=1$

$n=4$: $a_5\cdot a_3=a_4$ $\quad\therefore\ a_5=\frac{1}{2}$

$n=5$: $a_6\cdot a_4=a_5$ $\quad\therefore\ a_6=\frac{1}{2}$

$n=6$: $a_7\cdot a_5=a_6$ $\quad\therefore\ a_7=1$

$n=7$: $a_8\cdot a_6=a_7$ $\quad\therefore\ a_8=2$

따라서 $1,\ 2,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$가 반복된다.

$$
\begin{aligned}
&a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}\\
&=3\times\left(1+2+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\
&=21
\end{aligned}
$$

12. ③

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-5$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{15}(k+\alpha)(k+\beta)\\
&=\sum_{k=1}^{15}k^2+(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{15}k+(\alpha\beta)\sum_{k=1}^{15}1\\
&=1240+360-75\\
&=1525
\end{aligned}
$$

13. ②

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n+2}-2n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}$$
$$=\frac{3}{4}$$

14. ③

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-a}$가 0이 아닌 극한값을 가지므로

$x\to1$일 때 분모도 0이 되어야 한다.

$\therefore a=1$

㉠ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-a^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

㉡ $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^3-a^3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}$

㉢ $\lim_{x\to1}\frac{x+a^3}{x^2-a^2}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-1}$ (극한값 존재하지 않음)

15. ④

$$\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}\cdot\frac{1}{5}$$
$$=\frac{1}{5}f'(5)=15$$

$\therefore f'(5)=75$

16. ②

$$\int_0^2(3x^2+3)dx$$
$$=\left[x^3+3x\right]_0^2$$
$$=14$$

17. ④

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+2k)^3\cdot\frac{2}{n^4}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}\right\}$$
$$=\int_0^2(1+x)^3dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(1+x)^4\right]_0^2$$
$$=20$$

18. ②

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

$\int_3^x f(t)dt=F(x)-F(3)$

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\int_3^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(F(x)-F(3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$$
$$=F'(3)\cdot2\sqrt{3}$$
$$=f(3)\cdot2\sqrt{3}$$
$$=112\sqrt{3}$$

19. ③

합격자 수를 x, 불합격자 수를 y라 하면

전체 평균 : $\frac{75x+50y}{x+y}=65$

식을 정리하면 $2x=3y$

합격률 = $\frac{x}{x+y}=\frac{x}{x+\frac{2}{3}x}=\frac{3}{5}$

20. ②

신뢰구간의 길이 $l=2k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

㉠ 신뢰도가 낮을수록

㉡ 표본의 크기가 클수록

짧아진다.