15. 5. 30. 경찰 2차 수학 정답 및 해설

- 남부고시 유상현 수학연구소 -

1. ①

$(A\cup B)\ = A-(A\cup B)=\varnothing$

2. ②

$2x=4-x,\ 7=-3y$

$x=\dfrac{4}{3},\ y=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ \ x+y=-1$

3. ③

$x+y-4=0$
$x-y-2=0$

$x=3,\ y=1$

$\therefore xy=3$

4. ③

$p(0)=3$이므로 $\quad\therefore\ \ c=3$

$p(-1)=a-b+3=6$

$p(1)=a+b+3=4$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ \ p(3)=9a+3b+c=18$

5. ②

점 (-2, 5)을 중심으로 하는 원 : $(x+2)^2+(y-5)^2=r^2$

이 원이 (1, 1)을 지나므로 대입하면,

$\therefore\ r=5$

6. ③

직선 $x+y-3=0$위의 한 점을 $(x,\ y)$,

점 $(3,\ -1)$과 $(x,\ y)$의 중점을 $Q(X,\ Y)$라 하면

$X=\dfrac{x+3}{2},\ \ Y=\dfrac{y-1}{2}$

$x,\ y$에 대하여 식을 정리하면,

$x=2X-3,\ y=2Y+1$

$(x,\ y)$는 $x+y-3=0$ 위의 점이므로 대입하면,

$(2X-3)+(2Y+1)-3=0$

$Y=-X+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \ a+b=-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$

(다른 풀이)

(1, 2), (2, 1)은 $x+y-3=0$위의 두 점이다.

$(3,\ -1)$과 의 중점을 구하면

$(2,\ \dfrac{1}{2}),\ (\dfrac{5}{2},\ 0)$

이 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y=-x+\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \ a+b=\dfrac{3}{2}$

7. ②

$$\begin{aligned}(g\circ f^{-1})(2)&=g(f^{-1}(2))\\&=g(\tfrac{3}{2})\\&=2\quad 2\end{aligned}$$

8. ①

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$의 양 변을 제곱하면,

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\sin^2\theta,\ \cos^2\theta$를 두 근으로 하는 이차방정식이

$ax^2+bx+1=0$이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$-\dfrac{b}{a}=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\dfrac{1}{a}=\sin^2\theta\times\cos^2\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$

$a=4,\ b=-4$

$\therefore\ \ a+b=0$

9. ④

케일리 헤밀턴 정리에 의하여

$A^2-(2+y)A+(2y+x)E=0$

$A^2=E$ 이므로 $y=-2,\ x=3$

$A^{2015}=(A^2)^{1007}\cdot A=A$

$A\cdot A=E$이므로 $A^{-1}=A$

$\therefore A^{-1}=\left.\begin{matrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{matrix}\right)$

10. ④

$$\log k] = \begin{cases} 0 & (1 \le k < 2) \\ 1 & (2 \le k < 4) \\ 2 & (4 \le k < 8) \\ 3 & (8 \le k < 16) \\ 4 & (16 \le k < 32) \\ 5 & (32 \le k < 64) \\ 6 & (64 \le k < 128) \\ 7 & (128 \le k < 256) \\ 8 & (256 \le k < 512) \\ 9 & (512 \le k < 1024) \\ 10 & (1024 \le k \le 2015) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{2015}[\log_2 k] = 1\times 2^1 + 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + 9\times 2^9 + 10\times 992$$

$= 1\times 2^1 + 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + \cdots + 9\times 2^9$ 라 하면

$2S = \quad 1\times 2^2 + 2\times 2^3 + 3\times 2^4 + \cdots + 9\times 2^{10}$

위의 식에서 아래식을 빼면,

$$\begin{aligned} -S &= 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9 - 9\times 2^{10} \\ &= (2^{10}-2) - 9\times 2^{10} \\ &= -8\times 2^{10} - 2 = -2^{13} - 2 \end{aligned}$$

$\therefore S = 2^{13}+2$

$$\sum_{k=1}^{2015}[\log_2 k] = (2^{13}+2) + 10\times 992 = 18114$$

11. ②

$a_4 = a_2 + 2d,\ a_8 = a_2 + 6d$

세 항이 등비수열을 이루므로 ${a_4}^2 = a_2 \cdot a_8$

$(a_2+2d)^2 = a_2 \cdot (a_2+6d)$

$2a_2 d - 4d^2 = 0$

$\therefore a_2 = 2d$

$a_2 = 2d,\ a_4 = 4d,\ a_8 = 8d$

$\therefore\ \ r = 2$

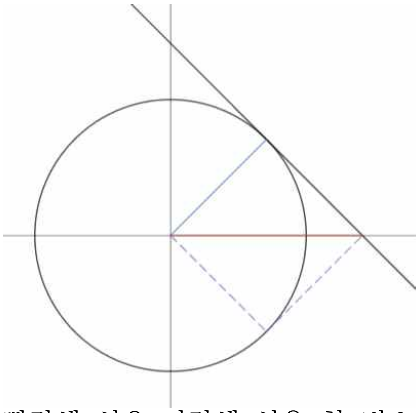
$\therefore r^2 + 1 = 5$

12. ①

$$\sum_{n=1}^{8} 2^{n-1} = 1 + 2 + \cdots + 2^7 = 2^{8-1} = 255$$

13. ④

원점이 중심인 원에 기울기가 -1인 접선의 개형은 다음과 같다.



빨간색 선은 파란색 선을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선이므로

빨간색선의 길이 = 파란색선의 길이 × 2

x절편 = 반지름 $\times \sqrt{2}$

$\therefore a_n = 3^{-n} \cdot \sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14. ③

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$= \frac{1}{4}$$

15. ④

$\frac{1}{n} = t$라 하면 $n\to\infty$ 일 때 $t\to 0$이다.

$$\lim_{n\to\infty} n\ f\left(2+\frac{4}{n}\right) - f\left(2-\frac{4}{n}\right)\Big\}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(2+4t)-f(2-4t)}{t}$$
$$= 8f'(2) = 32$$

16. ②

$'(x)=3x\ \ -6x=3x(x-2)$

$x=0$에서 극댓값 $f(0)=8$

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=4$를 갖는다.

$f(-3)=-46$, $f(3)=8$이므로

M=8, m=-46

$\therefore 7\quad +m=10$

17. ④

$y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$는 모두 (0, 0), (1, 0)을 지나므로 두 곡선의 교점은 (0, 0), (1, 0)이다.

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

${}_{0}^{1}(-x^4+x)-(x^4-x^3)\,dx$

$=\int_0^1 -2x^4+x^3+x\,dx$

$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{7}{20}$

이 넓이가 $y=a^2x(1-x)$에 의해 이등분 되므로

$\int_0^1(-x^4+x)-(a^2x(1-x))\,dx=\frac{7}{40}$

$\int_0^1(-x^4+x)-(a^2x(1-x))\,dx$

$=\int_0^1 -x^4+a^2x^2+(1-a^2)x\,dx$

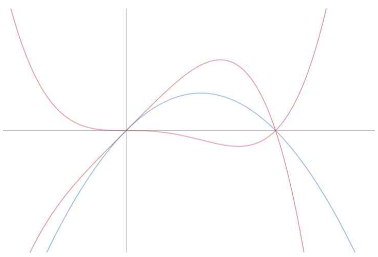
$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{a^2}{3}x^3+\frac{1-a^2}{2}x^2\right]_0^1$

$=-\frac{1}{5}+\frac{a^2}{3}+\frac{1-a^2}{2}=\frac{7}{40}$

$a^2=\frac{3}{4}$

$\therefore 12a^2=9$

[참고] 그래프 개형



18. ④

A사건 : 야구를 좋아함

B사건 : 남자 경찰

이라 하자.

야구를 좋아하는 경찰 한 명을 뽑았을 때

그 경찰이 남자경찰일 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5}$

19. ①

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$의 전개식에서 x^3의 계수

$a_n={}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}6a_n=1$

20. ③

$N(15,\ 9)$를 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

$\overline{X}$는 $N(15,\ 1)$의 정규분포를 따른다.

$P(13\le\overline{X}\le 16)$
$=P(-2\le Z\le 1)$
$=0.4772+0.3413=0.8185$