2022년 서울시 7급 자동제어 B책형 해설

01. ④	02. ④	03. ②	04. ④	05. ②	06. ②	07. ③	08. ④	09. ①	10. ②
11. ①	12. ③	13. ①	14. ①	15. ④	16. ③	17. ③	18. ③	19. ①	20. ④

1. 【정답】 ④

$$(0.5 - j0.5)e^{(-1+j^2)t} = (0.5 - j0.5) \cdot e^{-t} \cdot (\cos(2t) + j \sin(2t))$$

따라서 실수부는

$$0.5 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + (-j0.5) \cdot e^{-t} \cdot j \sin(2t) = 0.5e^{-t} \cos(2t) + 0.5e^{-t} \sin(2t)$$

2. 【정답】 ④

$$\dot{x}_1 \Big|_{(0,0)} = 0 - 0 + 0 = 0, \quad \dot{x}_2 \Big|_{(0,0)} = 0^3 = 0$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = x_2 + \sec^2(x_1), \quad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = x_1 - \cos(x_2), \quad \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = 3x_1^2, \quad \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \Big|_{(0,0)} \\ \dot{x}_2 - \dot{x}_2 \Big|_{(0,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \Big|_{(0,0)} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \Big|_{(0,0)} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} \Big|_{(0,0)} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \Big|_{(0,0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 - x_1(0) \\ \overline{x}_2 - x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 - 0 \\ \dot{x}_2 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 - 0 \\ \overline{x}_2 - 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2, \quad \dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = 0$$

3. 【정답】 ②

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} - Ax = Bu$$

$$e^{-At} [\dot{x} - Ax] = \frac{d}{dt} [e^{-At} x] = e^{-At} Bu$$

$$\text{양변을 적분하면 } e^{-At} x - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B(\tau) d\tau$$

4. 【정답】 ④

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1 + \frac{10}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s+1}}$$

$$G_0(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+1)(s+2) + 10} = \frac{10(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 2s + 10}$$

5. 【정답】 ②

$$C(s) = (R(s) - 2sC(s) - sC(s)) \cdot \left(s \cdot s + \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\left(1 + 3\left(s^2 + \frac{1}{s}\right)\right)C(s) = \frac{1}{s}\left(s^2 + \frac{1}{s}\right)R(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s}\left(s^2 + \frac{1}{s}\right)}{1 + 3\left(s^2 + \frac{1}{s}\right)} = \frac{s^3 + 1}{s^2 + 3s^4 + 3s} = \frac{s^3 + 1}{3s^4 + s^2 + 3s}$$

6. 【정답】 ②

$x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ 이므로 위상변수표준형(가제어성표준형)으로 나타내면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

① $u(t) = -x_1(t)$ 일 때, $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (-x_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 이므로

특성방정식은 $s^2 + 4s + 5 = 0$ 이다.

② $u(t) = -x_2(t)$ 일 때, $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} (-x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 이므로

특성방정식은 $s^2 + 6s + 3 = 0$ 이다.

③, ④ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0]$ 이라 하면 $AB = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$, $CA = [0 \ 1]$ 이므로

가제어성 행렬 : $S = [BAB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $\det S = -4 \neq 0$

가관측성 행렬 : $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det V = 1 \neq 0$

따라서 주어진 시스템은 가제어(controllable)하고 가관측(observable)하다.

7. 【정답】 ③

③ 비례제어기는 정상상태오차를 없앨 수는 없지만 직접적으로 정상상태오차에 영향을 준다.

8. 【정답】 ④

Routh-Hurwitz 판별법을 쓰면

$$\begin{array}{rcccc}
 s^5 & 1 & 3 & 3 \\
 s^4 & -1 & -3 & -2 \\
 s^3 & 0 \approx \varepsilon & 1 & \\
 s^2 & \frac{-3\varepsilon+1}{\varepsilon} > 0 & -2 & \\
 s^1 & \frac{2\varepsilon^2-3\varepsilon+1}{-3\varepsilon+1} > 0 & & \\
 s^0 & -2 & &
 \end{array}$$

따라서 부호변화의 횟수가 3번($1 \rightarrow -1$, $-1 \rightarrow \varepsilon$, $\frac{2\varepsilon^2-3\varepsilon+1}{-3\varepsilon+1} \rightarrow -2$)이므로 우반 평면에 3개, 좌반평면에 2개, $j\omega$ 축에 0개의 극점이 존재한다.

9. 【정답】 ①

단위계단함수에 대한 정상상태 오차

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) \cdot \frac{1}{Ls + R}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

10. 【정답】 ②

1) $\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{D(s)=0}$

$$Y(s) = ((R(s) - Y(s)) \cdot Z(s) - X(s) \cdot Y(s)) \cdot G(s)$$

$$(1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)) Y(s) = G(s)Z(s)R(s)$$

$$\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{D(s)=0} = \frac{G(s)Z(s)}{1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)}$$

2) $\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{R(s)=0}$

$$Y(s) = ((-Y(s)) \cdot Z(s) - X(s) \cdot Y(s) + D(s)) \cdot G(s)$$

$$(1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s))Y(s) = G(s)D(s)$$

$$\left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{R(s)=0} = \frac{G(s)}{1 + G(s)X(s) + G(s)Z(s)}$$

11. 【정답】 ①

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(Js+B)}}{1 + \frac{K}{s(Js+B)}} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}$$

$$\text{고유진동수 } \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}, \text{ 감쇠비 } \zeta = \frac{\frac{B}{J}}{2\sqrt{\frac{K}{J}}} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

- ① $0 < \zeta = \frac{B}{2\sqrt{JK}} < 1$ 이면 미흡감쇠응답이므로 페루프극점은 켈레복소수로 주어진다.
- ② $0 < \zeta = \frac{B}{2\sqrt{JK}} < 1$ 이면 s 평면의 왼쪽 반평면에 극점이 존재한다.
- ③ 단위계단입력에 대해 B 가 0이면 감쇠비 $\zeta = 0$ 이므로 과도응답은 시간이 지나더라도 사라지지 않는다.
- ④ 페루프전달함수 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K}$ 이다.

12. 【정답】 ③

$$G(j\omega_p) = \frac{1}{j\omega_p(-\omega_p^2 + j\omega_p + a)}$$

에서 위상교차 주파수 $\omega_p = \sqrt{a}$ [rad/s]이다.

$$G(j\sqrt{a}) = \frac{1}{j\sqrt{a} \cdot (j\sqrt{a})} = -\frac{1}{a}, \text{ 이득여유 GM} = 20\log a = 20 \text{ [dB]} \text{ 이므로 } a = 10$$

$$a = 10, \omega_p = \sqrt{a} = \sqrt{10} \text{ [rad/s]}$$

13. 【정답】 ①

$$\textcircled{1} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-[k_1 \ k_2 \ k_3]x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - k_1 & -4 - k_2 & 1 - k_3 \end{bmatrix} x$$

따라서 페루프 시스템의 특성방정식은

$$s^3 + (k_3 - 1)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_1 + 2) = 0 \text{ 이다.}$$

$$\textcircled{2} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 이라 하면 } AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

가제어성 행렬 : $S = [BAB A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\det S = -1 \neq 0$

따라서 주어진 시스템은 가제어하므로 페루프 시스템의 특성방정식이 임의의 3차 다항식 $s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0 = 0$ 과 같도록 하는 k_1, k_2, k_3 는 항상 존재한다.

③ ②로부터 <보기>의 상태 방정식은 제어가능(controllable)하다.

④ ①에서 페루프 시스템의 특성방정식은 $s^3 + (k_3 - 1)s^2 + (k_2 + 4)s + (k_1 + 2) = 0$ 이고, k_3 가 $0 < k_3 < 1$ 을 만족한다면 이차항의 계수 $k_3 - 1 < 0$ 이므로 페루프 시스템은 k_1, k_2 값과 관계없이 항상 불안정하다.

14. 【정답】 ①

<보기>의 단위계단응답에서 언더슈트(undershoot)가 발생하였으므로 우반평면에 영점이 있어야 하며, 좌반평면에 영점이 있는 ②, ④번은 시스템의 전달함수가 될 수 없다.

또한 시스템의 정상상태응답이 '1'이므로 최종치 정리에 의해 정상상태응답이

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{5s - 5}{s^2 + 2s + 5} \right) = -1$$

인 ③번은 시스템의 전달함수가 될 수 없다.

따라서 가장 적합한 시스템의 전달함수는 ①번 $\frac{-5s + 5}{s^2 + 2s + 5}$ 이다.

15. 【정답】 ④

$$Y(s) = (-Y(s) \cdot C(s) + D(s)) \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$\left(1 + \frac{C(s)}{s+1} \right) Y(s) = \frac{D(s)}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{D(s)}{s+1 + C(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+4}}{s+1 + C(s)} = \frac{1}{(s^2+4)(s+1) + (s^2+4)C(s)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(s^2+4)(s+1) + (s^2+4)C(s)} = 0$$

따라서 $\lim_{y \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 이 되기 위해서는 $\lim_{s \rightarrow 0} (s^2+4)C(s)$ 가 유한한 값을 가져야 하므로

$\lim_{s \rightarrow 0} (s^2+4)C(s) = \infty$ 인 ①번과 ②번은 제어가 될 수 없다.

③번 $C(s) = \frac{s+2}{s^2+4}$ 인 경우 $Y(s)$ 의 특성방정식

$(s^2+4)(s+1) + s+2 = s^3 + s^2 + 5s + 6 = 0$ 이 우반평면에 근이 존재하므로 불안정하고

④번 $C(s) = \frac{2s+1}{s^2+4}$ 인 경우 $Y(s)$ 의 특성방정식

$(s^2+4)(s+1) + 2s+1 = s^3 + s^2 + 6s + 5 = 0$ 이 좌반평면에만 근이 존재하므로 안정하다.

따라서 가장 알맞은 제어기는 ④번 $C(s) = \frac{2s+1}{s^2+4}$ 이다.

16. 【정답】 ③

질량 m_1 인 물체의 운동방정식(EOM) : $m_1 \ddot{y}_1 = u_1 - k_1 y_1 - k_2 y_1 - b \dot{y}_1 + k_2 y_2 + b \dot{y}_2$

질량 m_2 인 물체의 운동방정식(EOM) : $m_2 \ddot{y}_2 = u_2 - k_2 y_2 - b \dot{y}_2 - k_3 y_2 + k_2 y_1 + b \dot{y}_1$

문제에 주어진 변수로 정리하면

$$m_1 \dot{x}_2 = -(k_1 + k_2)x_1 - bx_2 + k_2 x_3 + bx_4 + u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-k_1 - k_2}{m_1} x_1 + \frac{-b}{m_1} x_2 + \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{b}{m_1} x_4 + \frac{1}{m_1} u$$

$$m_2 \dot{x}_4 = k_2 x_1 + bx_2 - (k_2 + k_3)x_3 - bx_4 + u_2$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{b}{m_2} x_2 + \frac{-k_2 - k_3}{m_2} x_3 + \frac{-b}{m_2} x_4 + \frac{1}{m_2} u_2$$

따라서 행렬로 정리하여 나타내면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{-b}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & \frac{-k_2 - k_3}{m_2} & \frac{-b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

17. 【정답】 ③

규격 1 : $C(s) = (-K_1 C(s) + D(s)) \cdot \frac{1}{s(s+K_2)}$,

$$\left(1 + \frac{K_1}{s(s+K_2)}\right) C(s) = \frac{1}{s(s+K_2)} D(s), \quad C(s) = \frac{D(s)}{s(s+K_2) + K_1} = \frac{\frac{1}{s}}{s(s+K_2) + K_1}$$

$$c_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(s+K_2) + K_1} = \frac{1}{K_1}$$

$$e_{\infty D} = r_\infty - c_\infty = -0.001, \quad c_\infty = r_\infty + 0.001 = 0.001 = \frac{1}{K_1}, \quad K_1 = 1,000$$

$$\text{규격 } 2 : e_{\infty R} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_1}{s(s+K_2)}} = \frac{K_2}{K_1} = 0.025, K_2 = 0.025K_1 = 25$$

18. 【정답】 ③

관측기가 추정한 상태 변수가 시스템을 제어하는데 사용될 경우 제어되는 폐루프 시스템의 응답 속도보다 빠르도록 관측기의 추정 속도를 향상시켜야 한다.

따라서 관측기 이득벡터 L 을 도입하며, 이때 상태 변수들이 신속하게 추정될 수 있도록 관측기의 과도 응답 특성이 제어시스템의 응답 속도보다 빠르도록 설계한다.

$$\begin{aligned} \text{상태방정식} : \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{상태관측기의 상태방정식} : \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{추정오차의 상태방정식} : \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) + L(y - \hat{y}) = (A - LC)(x - \hat{x}) \\ y - \hat{y} &= C(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

따라서 추정오차의 특성방정식 $\det(sI - (A - LC)) = 0$ 의 근(=행렬 $A - LC$ 의 고유값)이 좌반평면에 존재하면 추정오차는 0으로 빠르게 수렴하게 된다.

①번과 ②번은 관측기 이득벡터 L 이 없으므로 상태관측기로 적합하지 않으며,

$$\text{③번} : A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

특성방정식 $s^2 + 2s + 1 = 0$ 이므로 근이 좌반평면에 존재

$$\text{④번} : A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

특성방정식 $s^2 - 2s - 1 = 0$ 이므로 근이 우반평면에 존재

따라서 상태관측기(state observer)로 가장 적합한 것은 ③번이다.

19. 【정답】 ①

<보기 1>의 나이퀴스트(Nyquist) 선도로부터 위상교차주파수 $\omega_p = \sqrt{2}$ [rad/s]이므로

$$G(j\sqrt{2}) = \frac{10}{j\sqrt{2}(j\sqrt{2}+a)(j\sqrt{2}+b)} = \frac{10}{j\sqrt{2}(ab-2+j\sqrt{2}(a+b))}$$

$$ab = 2, G(j\sqrt{2}) = \frac{10}{-2(a+b)} = -\frac{5}{3}$$

$$a + b = 3$$

20. 【정답】 ④

<보기>의 근궤적선도(root locus)로부터

1. 극점, 영점

극점 : $0, -1 + j, -1 - j$

영점 : 없음

2. 실수축 상의 근궤적

$$\sigma \leq 0$$

3. 근궤적의 점근선의 각도

$$\theta_a = \frac{(2k+1)}{3-0} \times 180^\circ, \quad k=0, 1, 2 \text{ 이므로 } \theta_a = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

4. 점근선의 교차점

$$\sigma_a = \frac{-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

따라서 근궤적 중 하나는 $\sigma \leq 0$ 의 실수축을 따라 움직이고, 다른 두개는 $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ 에서 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ 을 교차점으로 갖는 $60^\circ, 300^\circ$ 의 점근선을 따라 움직인다.

① 근이 모두 좌반평면에 존재할 때가 있으므로 $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ 을 안정하게 하는 $K > 0$ 는 항상 존재한다.

② 임의의 $K > 0$ 에 대하여 $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ 의 극점 중 하나는 항상 실수축 위에 존재한다.

③ 실수축 위의 두 점 $(-2, j0)$ 과 $(0, j0)$ 사이의 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ 에 점근선의 교차점이 존재한다.

④ 근궤적의 각 지로(branch)는 s 가 커짐에 따라 $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ 의 각도를 가지는 점근선들로 점근한다.