2016학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ①	02. ⑤	03. ②	04. ③	05. ③
06. ⑤	07. ④	08. ⑤	09. ①	10. ④
11. ②	12. ③	13. ⑤	14. ④	15. ④
16. ②	17. ①	18. ③	19. ①	20. ②
21. ④	22. 12	23. 8	24. 16	25. 4
26. 72	27. 110	28. 13	29. 35	30. 65

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2\times 27^{\frac{1}{3}}=2\times(3^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$=2\times 3=6$$

정답 ①

2. 출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2A+B=2\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\4&a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4&2\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\4&a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5&2\\4&a+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\4&7\end{pmatrix}$$

따라서, $a+2=7$ 이므로

$a=5$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2^{n+1}+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 2+\frac{1}{2^n}}{1}$$
$$=6$$

정답 ②

4. 출제의도 : 그래프를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그래프의 변의 개수는 5개이므로 이 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은

$5\times 2=10$

정답 ③

5. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}=\lim_{x\to 7}(x+3)$$
$$=10$$

정답 ③

6. 출제의도 : 이산 확률분포에서 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=(-4)\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+4=4$$

따라서, $E(3X)=3E(X)$ 이므로

$\mathrm{E}(3\mathrm{X})=3\mathrm{E}(\mathrm{X})=3\times4=12$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 계차수열과 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$b_n=a_{n+1}-a_n$$
$$=(n+1)^2+2-(n^2+2)$$
$$=n^2+2n+1-n^2$$
$$=2n+1$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{6}b_n=\sum_{n=1}^{6}(2n+1)$$
$$=2\times\frac{6\times7}{2}+1\times6$$
$$=48$$

정답 ④

8. 출제의도 : 주어진 함수의 그래프에서 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to-0}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+0}f(x)=3$ 이므로

$\lim_{x\to-0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=2+3=5$

정답 ⑤

9. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 구하고, 무한급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_4-a_2=(a_1+3d)-(a_1+d)$$
$$=2d$$
$$=4$$

$\therefore\ d=2$

따라서 $a_1=4$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=4+(n-1)\times2$$
$$=2n+2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(2n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1$$

정답 ①

10. 출제의도 : 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$$
$$=\int(x+1)dx$$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

그런데, $f(0)=1$ 이므로 $C=1$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 이므로

$f(4)=\frac{1}{2}\times 4^2+4+1=13$

정답 ④

11. **출제의도** : 표본평균 $\overline{X}$의 분포와 관련된 실생활문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

이 지역의 1인 가구의 월 식료품 구입비를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 8^2)$을 따른다.

이 지역의 1인 가구 중 임의로 추출한 16가구의 월 식료품 구입비의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=45,\ \sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{16}}=2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(45,\ 2^2)$을 따르며 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-45}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(44\le\overline{X}\le 47)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{44-45}{2}\le Z\le\frac{47-45}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.1915+0.3413$

$=0.5328$

정답 ②

12. **출제의도** : 로그함수의 그래프를 이해하고 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 x축과 만나는 점이 각각 A, B이므로

$A(1,0)$, $B(3,0)$

이다.

또한, 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점이 각각 P, Q이므로

$P(k,\log_2 k)$, $Q(k,\log_2(k-2))$

이다.

이때, $R(k,0)$이고 점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$\frac{\log_2 k}{2}=\log_2(k-2)$, $\log_2 k=2\log_2(k-2)$

$\log_2 k=\log_2(k-2)^2$

$k=(k-2)^2$, $k^2-5k+4=0$

$(k-1)(k-4)=0$

그런데, $k>3$ 이므로 $k=4$

따라서, 구하고자 하는 사각형 $ABQP$의 넓이는 삼각형 ARP의 넓이에서 삼각형 BRQ의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times(4-1)\times\log_2 4-\frac{1}{2}\times(4-3)\times\log_2 2$

$=\frac{3}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 1$

$=\frac{5}{2}$

정답 ③

13. **출제의도** : 도함수를 이용하여 극값을 갖기 위한 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=f(x)-kx$ 에서

$g'(x)=f'(x)-k$

$\quad =x^2-1-k$

함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로

$g'(-3)=(-3)^2-1-k$

$\quad =8-k=0$

$\therefore\ k=8$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 곡선과 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int(x^2-1)dx$

$\quad =\frac{1}{3}x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

그런데, $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

즉,

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$\quad =\frac{1}{3}x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|\frac{1}{3}x^3-x|dx$

$=2\int_0^{\sqrt{3}}(-\frac{1}{3}x^3+x)dx$

$=2[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2]_0^{\sqrt{3}}$

$=2(-\frac{9}{12}+\frac{3}{2})$

$=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$

정답 ④

15. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 $P(A\cap B)$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

에서

$P(A)=P(B)=P(A\cap B)+\frac{1}{6}$

이고 $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$\quad =2\left\{P(A\cap B)+\frac{1}{6}\right\}-\frac{2}{3}$

$\quad =2P(A\cap B)+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$

$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

정답 ④

16. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력이

v라 하면 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력은 $0.9v$이고 $d=75$이므로

$$L_A=80+28\log\frac{0.9v}{100}-14\log\frac{75}{25}\cdots㉠$$

$$L_B=80+28\log\frac{v}{100}-14\log\frac{75}{25}\cdots㉡$$

㉡$-$㉠에서

$$L_B-L_A=28\left(\log\frac{v}{100}-\log\frac{0.9v}{100}\right)$$

$$=28\log\frac{\frac{v}{100}}{\frac{0.9v}{100}}$$

$$=28\log\frac{10}{9}$$

$$=28(1-\log 9)$$

$$=28(1-2\log 3)$$

$$=28-56\log 3$$

정답 ②

17. 출제의도 : 조건을 만족시키는 일반항 $\{a_n\}$을 구하는 과정에서 S_n을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_n=(a_n)^2$이라 하면

$b_1=10$이고

주어진 식으로부터

$$b_{n+1}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\quad(n\geq 1)$$

이다. $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$라 하면

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$$

$$=S_n+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$$

$$=S_n+\frac{S_n}{n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)S_n$$

$$=\boxed{\frac{n+1}{n}}\times S_n$$

이다.

$S_1=10$이고,

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+1}{n}$이므로

$n\geq 2$일 때,

$$S_n=S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$=10\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$$

$$=10n$$

$S_1=10$이므로

$S_n=\boxed{10n}\ (n\geq 1)$

이다.

따라서 $f(n)=\frac{n+1}{n}$, $g(n)=10n$이므로

$$f(5)\times g(6)=\frac{6}{5}\times 60=72$$

정답 ①

18. 출제의도 : 행렬의 연산의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $AB-B^2=E$에서 $AB^2-B^3=B$이므로

$AB^2=B^3+B=E$ (참)

ㄴ. $AB-B^2=(A-B)B=E$ 이므로

$B(A-B)=BA-B^2=E$

즉, $AB-B^2=BA-B^2$ 이므로

$AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB-B^2=E$, $B^3+B=E$에서

$AB-B^2=B^3+B$ 이고 ㄴ에서 B^{-1}이 존재하므로

$ABB^{-1}-B^2B^{-1}=B^3B^{-1}+BB^{-1}$

$A-B=B^2+E$

$A-B^2=B+E$ (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 뿐이다.

정답 ③

19. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(나)에서 $a+b+c\le 5$이므로

(가)에서 $a+b+c+3d=10$을 만족하는 경우는

(i) $d=2$일 때, $a+b+c=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$${}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2$$

$$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(ii) $d=3$일 때, $a+b+c=1$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$${}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$15+3=18$

정답 ①

20. **출제의도** : 도형과 관련된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\neq1$일 때,

$(\frac{1}{2})^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$ 에서

$(\frac{1}{2})^{n-1}=3x$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1}$

즉, $P_n(\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1},(\frac{1}{2})^{n-1}\left\{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1}-1\right\})$

$P_n(\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1},\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1}-(\frac{1}{2})^{n-1})$

이므로

$\overline{P_nH_n}=(\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$$

정답 ②

21. **출제의도** : 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 파악하고 미분계수와 관련된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A(t,\ t^4-4t^3+10t-30)$

$B(t,\ 2t+2)$

$f(t)=\overline{AB}$

$=\sqrt{(t-t)^2+(t^4-4t^3+10t-30-2t-2)^2}$

$=\sqrt{(t^4-4t^3+8t-32)^2}$

$=|t^4-4t^3+8t-32|$

$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$라 하자.

$g'(t)=4t^3-12t^2+8$

$\quad=4(t-1)(t^2-2t-2)$

$g'(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=1\pm\sqrt{3}$

함수 $g(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$	↘	극소	↗	-27	↘	극소	↗

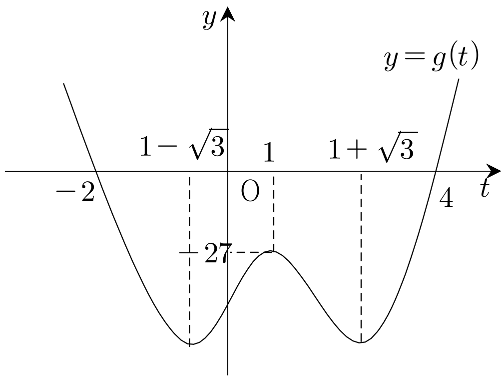
사차함수 $g(t)$는 $t=1$에서 극댓값 -27을 갖고, $t=1-\sqrt{3}$, $t=1+\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖는다.

또한,

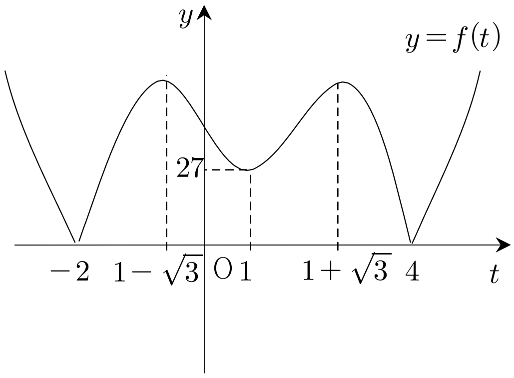
$g(t)=t^4-4t^3+8t-32$

$\quad=(t+2)(t-4)(t^2-2t+4)$

이므로 함수 $g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to-0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은

$-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

이다.

정답 ④

22. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_n=4r^{n-1}$

이므로

$3\times4r^4=4\times r^6$, $r^2=3$

$\therefore\ a_3=4r^2=4\times3=12$

정답 12

23. **출제의도** : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2-2x-12$에서

$f'(x)=2x-2$이므로

$f'(5)=8$

정답 8

24. **출제의도** : 행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해가 일치할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ 에서 $2x+y=7$, $y=1$이므로 $x=3$ 이다.

따라서,

$\begin{pmatrix}3&-1\\-4&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-12+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

이므로

$-12+a=4$

$\therefore\ a=16$

정답 16

25. **출제의도** : 정적분으로 나타내어진 함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int_0^x(2at+1)dt$에서

$f'(x)=2ax+1$

$f'(2)=4a+1=17$

이므로

$a=4$

정답 4

26. **출제의도** : 조건부확률을 구하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

도서관 이용자 300명 중에서 임의로 선택한 1명이 남성일 사건을 A, 20대인 사건을 B, 30대인 사건을 C라 하자.

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12%이므로 그 수는

$300\times0.12=36$

이다.

따라서, $(60-a)+b=36$ 이므로

$a-b=24\cdots$㉠

또한, $P(B|A)=P(C|A^C)$ 이므로

$\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(A^C\cap C)}{P(A^C)}$

$\dfrac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\dfrac{\frac{b}{300}}{1-\frac{200}{300}}$, $\dfrac{a}{200}=\dfrac{b}{100}$

$a=2b\cdots$㉡

㉠,㉡에서 $a=48$, $b=24$이므로

$a+b=72$

정답 72

27. 출제의도 : 수열의 극한값에 대한 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+4n)-b^2n^2}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}=\frac{1}{5}$$

이 성립하려면

$a-b^2=0$, $a=b^2$ $\cdots$ ㉠

이어야 하고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}=\frac{4}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{5}\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{4}{\sqrt{b^2}+b}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{|b|+b}=\frac{1}{5}$$

$|b|+b\neq 0$이어야 하므로 $b>0$

즉, $\frac{4}{2b}=\frac{1}{5}$

따라서 $a=100$, $b=10$이므로

$a+b=110$

정답 110

28. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 극한값이 존재하므로

$f(x)=x^3+6x+a$ (a는 상수)

또한, 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=-7$ 이므로

$a=-7$

즉, $f(x)=x^3+6x-7$ 이므로

$f(2)=2^3+6\times 2-7=13$

정답 13

29. 출제의도 : 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 표준화와 표준정규분포곡선의 성질을 이용하여 확률의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(4,\,3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-4}{3}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\sum_{n=1}^{7}\mathrm{P}(X\leq n)=\sum_{n=1}^{7}\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{n-4}{3}\right)$$

$$=\mathrm{P}(Z\leq -1)+\mathrm{P}\left(Z\leq -\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\leq -\frac{1}{3}\right)$$

$$+\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{1}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}(Z\leq 1)$$

$$=\mathrm{P}(Z\geq 1)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{1}{3}\right)$$

$$+\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{1}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}(Z\leq 1)$$

$$=\{\mathrm{P}(Z\geq 1)+\mathrm{P}(Z\leq 1)\}+\left\{\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$+\left\{\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{1}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{1}{3}\right)\right\}+\mathrm{P}(Z\leq 0)$$

$=1+1+1+\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{2}$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로

$10a=35$

정답 35

30. **출제의도** : 지표와 가수의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log x=f(x)+g(x)$

(단, $f(x)$는 정수, $0\le g(x)<1$)

라 하자.

(i) $x=2,4,6,8$일 때, $f(x)=0$이므로

$f(m)\le 0$ 에서 $m=1,2,\cdots,9$

$g(h(m))=g(m)\le g(x)$ 이므로

$g(m)\le g(2)$ 에서 $m=1,2$

$g(m)\le g(4)$ 에서 $m=1,2,3,4$

$g(m)\le g(6)$ 에서 $m=1,2,3,\cdots,6$

$g(m)\le g(8)$ 에서 $m=1,2,3,\cdots,8$

$\therefore\ p(2)+p(4)+p(6)+p(8)$

$=2+4+6+8=20\cdots$㉠

(ii) $x=10,12,14,\cdots,20$ 일 때, $f(x)=1$이므로

$f(m)\le 1$ 에서 $m=1,2,3,\cdots,99$

① $f(m)=0$일 때, 즉, $m=1,2,3,\cdots,9$일 때, $g(h(m))=g(m)\le g(x)$ 이므로

$g(m)\le g(10)$ 에서 $m=1$

$g(m)\le g(12)$ 에서 $m=1$

$\cdots$

$g(m)\le g(18)$ 에서 $m=1$

$g(m)\le g(20)$ 에서 $m=1,2$

② $f(m)=1$일 때, 즉 $m=10,11,\cdots,99$일 때, $g(h(m))=g(m+5)\le g(x)$ 이므로

$g(m+5)\le g(10)$ 에서 $m=95$

$g(m+5)\le g(12)$ 에서 $m=95,96,\cdots,99$

$g(m+5)\le g(14)$ 에서 $m=95,96,\cdots,99$

$g(m+5)\le g(16)$ 에서

$m=10,11$ 와 $m=95,96,\cdots,99$

$g(m+5)\le g(18)$ 에서

$m=10,11,12,13$ 과 $m=95,96,\cdots,99$

$g(m+5)\le g(20)$ 에서

$m=10,11,12,\cdots,15$ 와 $m=95,96,\cdots,99$

$\therefore\ p(10)+p(12)+p(14)+\cdots+p(20)$

$=(1+1)+2\times(1+5)+(1+7)+(1+9)$
$+(2+11)$

$=2+12+8+10+13=45\cdots$㉡

㉠,㉡에 의하여

$\sum_{k=1}^{10}p(2k)=20+45=65$

정답 65