

01. ④	02. ②	03. ③	04. ⑤	05. ①
06. ③	07. ⑤	08. ②	09. ①	10. ④
11. ②	12. ④	13. ①	14. ③	15. ①
16. ⑤	17. ⑤	18. ②	19. ④	20. ③
21. ④	22. 9	23. 11	24. 10	25. 6
26. 2	27. 68	28. 4	29. 25	30. 128

1. 출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} A+2B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서, 행렬 $A+2B$ 의 (1, 2) 성분은 4이다.

정답 ④

2. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5} &= \log_2 \left(5 \times \frac{4}{5} \right) \\ &= \log_2 4 \\ &= \log_2 2^2 \\ &= 2 \log_2 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 ②

3. 출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{3}x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x} \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

정답 ③

4. 출제의도 : 삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{1}{7} \text{ 이므로} \\ \sin \theta &= \pm \frac{1}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \theta = \pm \frac{7}{5\sqrt{2}} \\ (\text{단, 복부호동순}) \\ \therefore \sin 2\theta &= 2\sin \theta \cos \theta \\ &= 2\left(\pm \frac{1}{5\sqrt{2}}\right)\left(\pm \frac{7}{5\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{14}{50} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

정답 ⑤

5. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x+4} dx &= e^4 \int_0^1 e^x dx \\ &= e^4 [e^x]_0^1 \\ &= e^4 (e - 1) \\ &= e^5 - e^4 \end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 일차변환을 이용하여 점을

옮길 수 있는가?

정답풀이 :

역변환 f^{-1} 에 의하여 점 $(4,1)$ 이 점 (a,b) 로 옮겨지므로 일차변환 f 에 의하여 점 (a,b) 는 점 $(4,1)$ 로 옮겨진다.

즉,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

에서 $2a=4$, $b=1$ 이므로

$$a=2, \quad b=1$$

$$\therefore a+b=3$$

정답 ③

7. 출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = a \sin x + \sqrt{11} \cos x$$

$$= \sqrt{a^2 + 11} \sin(x + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{a^2 + 11}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 11}} \right)$$

에서 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로 함수

$$f(x) \text{의 최댓값은 } \sqrt{a^2 + 11}$$

$$\sqrt{a^2 + 11} = 6 \text{에서}$$

$$a^2 + 11 = 36, \quad a^2 = 25$$

$$\therefore a=5 \quad (\because a > 0)$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{a_1}{2}(3^n - 1) \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_1}{2}(3^n - 1)}{3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$= \frac{a_1}{2} (1 - 0)$$

$$= \frac{a_1}{2}$$

따라서 $\frac{a_1}{2} = 5$ 에서

$$a_1 = 10$$

정답 ②

9. 출제의도 : 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 A, B, C, D에서 중복을 허락하여 5개를 택하여 일렬로 배열하는 수와 같으므로

$${}_4\Pi_5 = 4^5 = 1024$$

정답 ①

10. 출제의도 : 두 직선이 서로 수직임을 이용하여 직선의 x 절편을 구한 후 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y=2nx$ 와 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{2n} \text{이므로 점 } P(n, 2n^2) \text{을 지나고 기울}$$

기가 $-\frac{1}{2n}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 2n^2 = -\frac{1}{2n}(x - n) \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 x 절편은

$$-2n^2 = -\frac{1}{2n}(x - n)$$

에서 $x = 4n^3 + n$ 이므로

$$\overline{OQ} = l_n = 4n^3 + n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + n}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 4 + 0 = 4 \end{aligned}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 분수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{2}{f(x)-1} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \text{에서}$$

양변에 분모의 최소공배수

$$\{f(x)-1\}(1-x)(1+x)$$

를 곱하면

$$2(1-x^2) = \{f(x)-1\}(1+x) + \{f(x)-1\}(1-x)$$

$$2(1-x^2) = 2\{f(x)-1\}$$

$$\therefore f(x) = 2-x^2 \text{ (단, } f(x) \neq 1, x \neq \pm 1 \text{)}$$

따라서 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = 2-x^2$ 의 그래프의 교점에서 $f(x) = 1$ 이거나 $x = \pm 1$ 인 점을 제외하면 되므로 구하는 실근의 개수는 2이다.

정답 ②

12. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\overline{FF'} = 2c, \overline{PF} = c \text{ 이고 } \angle FPF' = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

로

$$\overline{PF'} = \sqrt{3}c$$

따라서, 타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PF'} + \overline{PF} &= \sqrt{3}c + c \\ &= (\sqrt{3}+1)c = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore c &= \frac{4}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 2\sqrt{3}-2 \end{aligned}$$

정답 ④

13. 출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{직선 } y=2 \text{와 곡선 } y=2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}x \text{의 교}$$

점의 x 좌표는

$$2 = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}x$$

$$\sin \frac{\pi}{4}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_1^3 \left(2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}x - 2 \right) dx$$

$$= \left[-2\sqrt{2} \times \frac{4}{\pi} \cos \frac{\pi}{4}x - 2x \right]_1^3$$

$$= -2\sqrt{2} \times \frac{4}{\pi} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 6$$

$$- \left\{ (-2\sqrt{2}) \times \frac{4}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right\}$$

$$= \frac{8}{\pi} - 6 + \frac{8}{\pi} + 2$$

$$= \frac{16}{\pi} - 4$$

정답 ①

14. 출제의도 : 접선을 이용하여 부등식을 만족시키는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키기 위해서는 일차함수 $g(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 에서 함수

$$f(x) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}x$$

의 그래프와 접해야 한다.

따라서,

$$f'(x) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}x \times \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4}x$$

이고

$$f'(1) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$g(x) = \frac{\pi}{2}(x-1) + 2$$

$$= \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 2$$

$$\therefore g(3) = \pi + 2$$

정답 ③

15. 출제의도 : 무한히 반복되는 닮은꼴의 도형들에서 넓이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원 O_1 의 중심을 O_1 ,

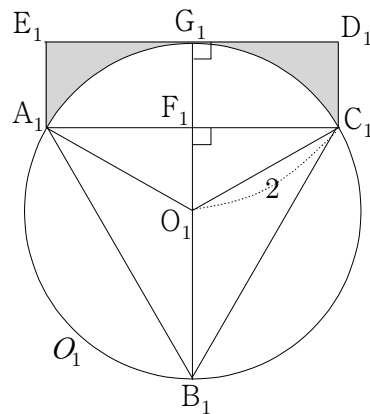
정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 한 변의 길이를 a 라 하자.

점 O_1 은 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 무게중심

이므로

$$\overline{O_1B_1} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a = 2$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}$$



직선 B_1O_1 이 두 선분 A_1C_1 , D_1E_1 과 만나는 점을 각각 F_1 , G_1 이라 하면

$$\overline{O_1F_1} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\overline{F_1G_1} = \overline{O_1G_1} - \overline{O_1F_1} = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore S_1 = 2\sqrt{3} \times 1$$

$$- \left(\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 \right)$$

$$= 2\sqrt{3} - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \right)$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

정삼각형 $A_1B_1C_1$ 에 내접하는 원 O_2 의 중심을 O_2 , 반지름의 길이를 r 라 하면

두 점 O_1 , O_2 가 일치하므로

$$r = \overline{O_1F_1} = 1$$

따라서 두 원 O_1 , O_2 의 닮음비가 2 : 1

이다.

그림 R_n 에서 처음으로 색칠된 도형을 T_n 이라 하면 두 도형 T_1, T_2 의 넓이의 비는 $4 : 1$ 이고, 같은 방법으로 두 도형 $T_n, T_{n+1} (n \geq 1)$ 의 넓이의 비도 $4 : 1$ 이므로

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{4} S_1$$

$$S_3 = S_1 + \frac{1}{4} S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1$$

.....

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= S_1 + \frac{1}{4} S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 S_1 + \dots$$

$$= \frac{S_1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} S_1$$

$$= \frac{4}{3} \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$$

정답 ①

16. 출제의도 : 합성함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 $x \neq 1$ 일 때 연속이고, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x = 1$ 에서 연속이면 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} (g \circ f)(x) &= \lim_{t \rightarrow 1-0} g(t) \\ &= 2 + 2^{-1} = \frac{5}{2} \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$a \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} (g \circ f)(x) &= \lim_{t \rightarrow a-0} g(t) \\ &= 2^a + 2^{-a} \end{aligned}$$

$a < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} (g \circ f)(x) &= \lim_{t \rightarrow a+0} g(t) \\ &= 2^a + 2^{-a} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (g \circ f)(x) = 2^a + 2^{-a} \dots \textcircled{8}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) &= g(f(1)) = g(1) \\ &= 2 + 2^{-1} = \frac{5}{2} \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

⑦, ⑧, ⑨이 일치해야 하므로

$$2^a + 2^{-a} = \frac{5}{2}$$

이때, $2^a = s (s > 0)$ 라 하면

$$s + \frac{1}{s} = \frac{5}{2}, \quad 2s^2 - 5s + 2 = 0$$

$$(2s - 1)(s - 2) = 0$$

$$\therefore s = \frac{1}{2} \text{ 또는 } s = 2$$

$$\text{즉, } 2^a = \frac{1}{2} \text{ 에서 } a = -1, \quad 2^a = 2 \text{ 에서}$$

$$a = 1 \text{이므로 모든 실수 } a \text{의 값의 곱은 } -1 \times 1 = -1$$

정답 ⑤

17. 출제의도 : 수열에 관련된 풀이과정을 이해하여 알맞은 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

식 (*)의 양변에 S_n 을 더하여 정리하면

$$S_{n+1} + 1 = 2^n (S_n + 1)$$

이다. $b_n = \log_2(S_n + 1)$ 이라 하면

$$b_1 = 1 \text{이고}$$

$$\log_2(S_{n+1} + 1) = \log_2\{2^n(S_n + 1)\}$$

$$\log_2(S_{n+1} + 1) = n + \log_2(S_n + 1)$$

$$b_{n+1} = \boxed{n} + b_n$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 1 + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$b_1 = 1$ 에서

$$b_n = \frac{n^2 - n + 2}{2} \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$S_n = 2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} - 1$$

이다. 그러므로 $a_1 = 1$ 이고, $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} - 1\right) - \left(2^{\frac{(n-1)^2 - (n-1) + 2}{2}} - 1\right) \\ &= 2^{\frac{n^2 - n + 2}{2}} - 2^{\frac{n^2 - 3n + 4}{2}} \\ &= 2^{\frac{n^2 - 3n + 4}{2}} \times (2^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

이다.

$$\text{따라서, } f(n) = n, \quad g(n) = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(12) - g(5) &= 12 - \frac{5^2 - 15 + 4}{2} \\ &= 12 - 7 = 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

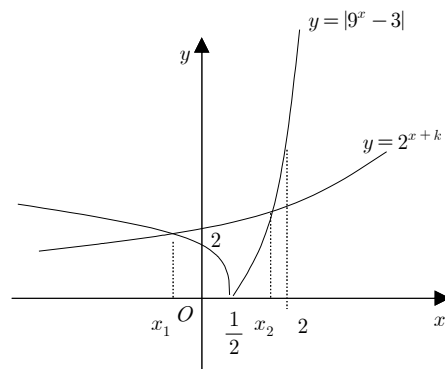
18. 출제의도 : 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$|9^x - 3| = 0 \text{ 에서 } 9^x = 3^{2x} = 3 \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

따라서, 두 곡선 $y = |9^x - 3|$, $y = 2^{x+k}$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표 x_1, x_2 가 $x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$ 를 만족시키는 경우는 그림과 같다.



즉, $x=0$ 일 때,

$$2^{0+k} = 2^k > 2 \cdots \textcircled{7}$$

$x=2$ 일 때,

$$2^{2+k} = 4 \times 2^k < |9^2 - 3| = 78$$

$$2^k < 19.5 \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 만족시키는 자연수 k 는

2, 3, 4

이므로 그 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

정답 ②

19. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선은 원점에 대하여 대칭이므로

$$\overline{PG} = \overline{QG'}, \overline{PF} = \overline{QF'}$$

주어진 쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로

(i) $\overline{PG} = k$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의해

$$\begin{aligned} \overline{PG} \times \overline{QG} &= \overline{QG'} \times \overline{QG} \\ &= k(k+2) = 8 \end{aligned}$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

(ii) $\overline{PF} = l$ 이라 하면 쌍곡선의 정의에 의해

$$\begin{aligned} \overline{PF} \times \overline{QF} &= \overline{QF'} \times \overline{QF} \\ &= l(l+2) = 4 \end{aligned}$$

$$l^2 + 2l - 4 = 0$$

$$\therefore l = -1 + \sqrt{5} \quad (\because l > 0)$$

(i), (ii)에 의해 사각형 PGQF의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} k + (k+2) + l + (l+2) \\ &= 2k + 2l + 4 \\ &= 2 \times 2 + 2(-1 + \sqrt{5}) + 4 \\ &= 6 + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

정답 ④

20. 출제의도 : 지표와 가수의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(1) $n = 4$ 이면

(i) $1 \leq t < 10$ 일 때 $0 \leq \log t < 1$ 이므로 $0 \leq 4\log t < 4$

따라서, $m = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(t^4) &= 4\log t - (m-1) \\ &\quad (\text{단, } m-1 \leq 4\log t < m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t^4) + 2f(t) \\ &= 4\log t - (m-1) + 2\log t \\ &= 6\log t - m + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \log t = \frac{m}{6}$$

그런데, $m = 4$ 일 때 즉 $\log t = \frac{2}{3}$ 인 경우

$3 \leq 4\log t < 4$ 를 만족시키지 못한다.

(ii) $10 \leq t < 100$ 일 때 $1 \leq \log t < 2$ 이므로 $4 \leq \log t < 8$

따라서, $m = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(t^4) &= 4\log t - (m+3) \\ &\quad (\text{단, } m+3 \leq 4\log t < m+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t^4) + 2f(t) \\ &= 4\log t - (m+3) + 2(\log t - 1) \\ &= 6\log t - m - 5 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \log t = \frac{m+6}{6}$$

그런데, $m = 4$ 일 때 즉 $\log t = \frac{5}{3}$ 인 경우

$7 \leq 4\log t < 8$ 을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $a_4 = 6$

(2) $n = 5$ 일 때

(i) $1 \leq t < 10$ 일 때 $0 \leq \log t < 1$ 이므로 $0 \leq 5\log t < 5$

따라서, $m = 1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(t^5) &= 5\log t - (m-1) \\ &\quad (\text{단, } m-1 \leq 5\log t < m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t^5) + 2f(t) \\ &= 5\log t - (m-1) + 2\log t \\ &= 7\log t - m + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \log t = \frac{m}{7}$$

그런데, $m = 4$ 일 때 즉, $\log t = \frac{4}{7}$, $m = 5$

일 때 즉, $\log t = \frac{5}{7}$ 인 경우는 각각

$3 \leq 5\log t < 4$, $4 \leq 5\log t < 5$ 를 만족시키지 못한다.

(ii) $10 \leq t < 100$ 일 때 $1 \leq \log t < 2$ 이므로 $5 \leq 5\log t < 10$

따라서, $m = 1, 2, 3, 4, 5$ 에 대하여

$$f(t^5) = 5\log t - (m+4)$$

(단, $m+4 \leq 5\log t < m+5$)

$$f(t^5) + 2f(t)$$

$$= 5\log t - (m+4) + 2(\log t - 1)$$

$$= 7\log t - m - 6 = 1$$

$$\therefore \log t = \frac{m+7}{7}$$

그런데, $m=4$ 일 때 즉, $\log t = \frac{11}{7}$,

$m=5$ 일 때 즉, $\log t = \frac{12}{7}$ 인 경우는 각각

$$8 \leq 5\log t < 9, 9 \leq 5\log t < 10$$

을 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $a_5 = 6$

$$\therefore a_4 + a_5 = 12$$

정답 ③

21. 출제의도 : 도함수를 활용하여 함수가 역함수를 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$ 에서

$$f'(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\}$$

$$+ e^{x+1}(2x + n - 2) + a$$

$$= e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + a$$

$f(x)$ 가 역함수를 가지려면

$$f'(x) \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$h(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1)$ 이라 하면

$$h'(x) = e^{x+1}(x^2 + nx + 1) + e^{x+1}(2x + n)$$

$$= e^{x+1}\{x^2 + (n+2)x + n + 1\}$$

$$= e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$$

$h'(x) = 0$ 에서

$$x = -n-1 \quad \text{또는} \quad x = -1$$

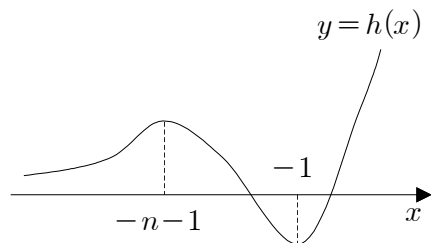
함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로

나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		극대		극소	

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 의

그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 n 이 2이상인 자연수이므로 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값

$$h(-1) = 2 - n$$

을 갖는다.

즉, ㉠에서

$$2 - n + a \geq 0$$

$$a \geq n - 2$$

따라서 실수 a 의 최솟값 $g(n)$ 은

$$g(n) = n - 2$$

$$1 \leq g(n) \leq 8 \text{에서}$$

$$1 \leq n - 2 \leq 8$$

$$\therefore 3 \leq n \leq 10$$

따라서 구하는 모든 n 의 값의 합은

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 5 + \cdots + 10 &= \frac{8(3+10)}{2} \\ &= 52 \end{aligned}$$

정답 ④

22. 출제의도 : 무리방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sqrt{7x+1} &= x-1 \text{의 양변을 제곱하면} \\ 7x+1 &= x^2-2x+1 \\ x^2-9x &= 0, \quad x(x-9)=0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=9 \\ \text{그런데, } x=0 &\text{은 무연근이므로} \\ x &= 9\end{aligned}$$

정답 9

23. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\text{첫째항이 2인 등차수열 } \{a_n\} \text{의 공차를} \\ d \text{라 하면} \\ a_7 + a_{11} &= 2 + 6d + 2 + 10d \\ &= 4 + 16d = 20 \\ \therefore d &= 1 \\ \therefore a_{10} &= a_1 + 9d \\ &= 2 + 9 \times 1 = 11\end{aligned}$$

정답 11

24. 출제의도 : 포물선에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}y^2 &= 20x = 4 \times 5x \text{이므로 접선의 방정식은} \\ y &= \frac{1}{2}x + \frac{5}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x + 10\end{aligned}$$

따라서 y절편은 x=0일 때 10이다.

정답 10

25. 출제의도 : 매개변수의 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t^2 + 10 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t^2 + 10}{2t} \\ &= \frac{t^2 + 5}{t}\end{aligned}$$

따라서 t=1일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1+5}{1} = 6$$

정답 6

26. 출제의도 : 연립일차방정식의 해가 무수히 많을 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ay \\ 2x-y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 2-1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ 2-1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1-a \\ -3 & 4a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

따라서, 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -1-a \\ -3 & 4a+1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 $\textcircled{7}$ 은 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지므로

$$\begin{aligned}1 \times (4a+1) - (-1-a)(-3) &= 0 \\ a-2 &= 0 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

정답 2

27. 출제의도 : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $x+y+z+u=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u 의 모든 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_4H_6 &= {}_9C_6 \\ &= {}_9C_3 \\ &= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \end{aligned}$$

(ii) $x=u$ 일 때, $x+y+z+u=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u 의 모든 순서쌍 (x, y, z, u) 의 개수는

$$2x+y+z=6 \cdots \textcircled{1}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같으므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$x=0 \text{ 일 때, } {}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

$$x=1 \text{ 일 때, } {}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

$$x=2 \text{ 일 때, } {}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$$x=3 \text{ 일 때, } {}_2H_0 = {}_1C_0 = 1$$

따라서 구하는 개수는

$$7+5+3+1=16$$

(i), (ii)에 의해 구하는 개수는

$$84-16=68$$

정답 68

28. 출제의도 : 합성변환과 역변환을 이해하고 점을 이동시킬 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

또한, 일차변환 f^{-1} 을 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

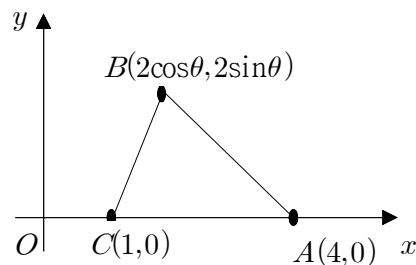
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C(1,0)$$

따라서, 삼각형 ABC 는 그림과 같고 넓이는 1이므로



$$\frac{1}{2} \times 2\sin\theta \times (4-1) = 3\sin\theta = 1$$

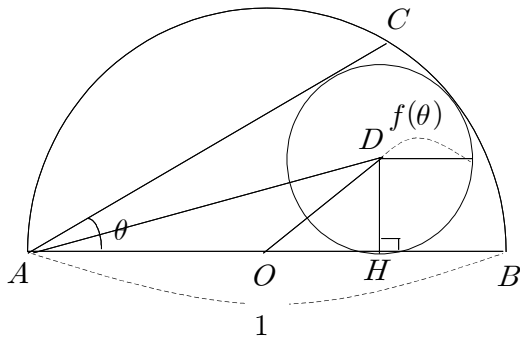
$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore p+q=4$$

정답 4

29. 출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



호 BC 와 두 선분 AB, AC 에 동시에 접하는 원의 중심을 D , 점 D 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H , 선분 AB 의 중점을 O 라 하자.

$$\angle BAC = \theta \text{ 이므로 } \angle HAD = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

한편, 직각삼각형 DOH 에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\left\{\frac{1}{2} - f(\theta)\right\}^2 - \{f(\theta)\}^2}$$

이므로

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\left\{\frac{1}{2} - f(\theta)\right\}^2 - \{f(\theta)\}^2} = \frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{2} - f(\theta)\right\}^2 - \{f(\theta)\}^2} = \frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - f(\theta) + \{f(\theta)\}^2 - \{f(\theta)\}^2 \\ = \left\{\frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}}\right\}^2 - \left\{\frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}}\right\} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$-f(\theta) = \left\{\frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}}\right\}^2 - \left\{\frac{f(\theta)}{\tan \frac{\theta}{2}}\right\}$$

의 양변에 $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ 을 곱하여 정리하면

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ 에서 } f(\theta) > 0 \text{ 이므로}$$

$$-\tan^2 \frac{\theta}{2} = f(\theta) - \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore f(\theta) = \tan \frac{\theta}{2} - \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \alpha = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\tan \frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta^2}{4}} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore 100\alpha = 25$$

정답 25

30. 출제의도 : 정적분의 값이 최대가 될 조건을 구하고 그 때의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \leq k \leq 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여

$$f(k+t) = f(k) \quad (0 < t \leq 1)$$

을 만족시키는 함수

$$y = f(x) \quad (k < x \leq k+1)$$

의 그래프는 x 축과 평행하다.

또한, $0 \leq k \leq 7$ 인 각각의 정수 k 를 m 이라 하면

$$f(m+t) = 2^t \times f(m) \quad (0 < t \leq 1)$$

이므로

$$f(m+1+t) = 2^t \times f(m+1)$$

$$= 2^t \times 2 \times f(m)$$

$$= 2^{t+1} \times f(m)$$

따라서, $0 \leq k \leq 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여

$$f(k+t) = 2^t \times f(k) \quad (0 < t \leq 1)$$

을 만족시키는 함수 $y = f(x)$ ($k < x \leq k+1$)의 그래프는 지수의 밑이 2인 지수함수의 그래프이다.

그리고, $f(8) \leq 100$ 이므로

$$2^6 = 64, \quad 2^7 = 128$$

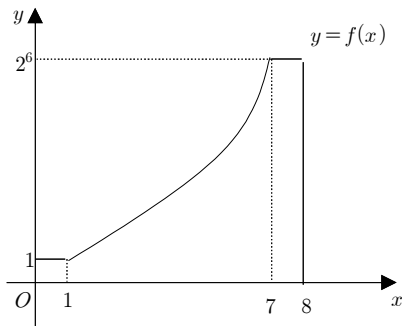
에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 64이어야 한다.

따라서, 연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^8 f(x) dx \text{가 최댓값을 가지면서 열린 구간 } (0,8) \text{에서 함수 } f(x) \text{가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2가 되어야 하므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 2^{x-1} & (1 \leq x \leq 7) \\ 64 & (7 \leq x \leq 8) \end{cases}$$

이다. 즉, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같아야 한다.



따라서, $\int_0^8 f(x) dx$ 의 최댓값은

$$1 \times 1 + \int_1^7 2^{x-1} dx + 1 \times 2^6$$

$$= 65 + \frac{1}{2} \int_1^7 2^x dx$$

$$= 65 + \frac{1}{2} \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_1^7$$

$$= 65 + \frac{1}{2} \left(\frac{2^7}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \right)$$

$$= 65 + \frac{63}{\ln 2}$$

따라서, $p = 65$, $q = 63$ 이므로

$$p + q = 128$$

정답 128