

2015학년도 4월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	4	2	3	3	2	4	4	5	1
6	1	7	2	8	5	9	5	10	2
11	4	12	3	13	2	14	1	15	3
16	5	17	3	18	3	19	4	20	4
21	1	22	6	23	13	24	8	25	23
26	235	27	70	28	32	29	138	30	10

1. [출제의도] 지수의 성질을 알고 계산하기

$$4^4 \times 8^2 = 2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$$

2. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

3. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 계산하기

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

4. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

$$f(A) + 2f(B) = f(A+2B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

5. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$$\log_3 x = t \text{ 라 하면}$$

$$\log_9 x = \frac{1}{2} \log_3 x = \frac{1}{2} t \text{ 이므로}$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

$$\log_3 x = -3 \text{ 또는 } \log_3 x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 실근의 곱은 $\frac{1}{9}$

6. [출제의도] 등차수열 이해하기

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 5 \times a_6 = 55$$

$$\therefore a_6 = 11$$

$$\text{수열 } \{a_n\} \text{의 공차를 } d \text{ 라 하면}$$

$$a_6 - a_1 = 5d = 10 \quad \therefore d = 2$$

$$\text{따라서 } a_{11} = a_1 + 10d = 21$$

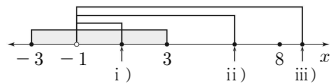
7. [출제의도] 분수부등식 이해하기

$$(x+3)(x-3)(x-8)^2 \leq 0 \text{의 해는}$$

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ 또는 } x = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{x-k}{x+1} \leq 0 \text{의 해는 } -1 < x \leq k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여 주어진 연립부등식의 해는 그림과 같다.



자연수 k 의 값의 범위에 따라 정수 x 의 개수는 다음

과 같다.

i) $1 \leq k < 3$ 일 때

$-1 < x \leq k$ 이므로 $(k+1)$ 개

ii) $3 \leq k < 8$ 일 때

$-1 < x \leq 3$ 이므로 4개

iii) $k \geq 8$ 일 때

$-1 < x \leq 3$ 또는 $x = 8$ 이므로 5개

i), ii), iii)에서 정수 x 의 개수가 4가 되도록

하는 자연수 k 는 3, 4, 5, 6, 7

따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은 25

8. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{2} \right) \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{2} = b_n \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이고}$$

$$a_n = (n+1) \left(b_n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(b_n + \frac{1}{2}\right)}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{8}$$

9. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$$2\cos^2 x - 1 + 6 \times \frac{1+\cos x}{2} = 1$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = -1$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \pi$$

따라서 모든 실근의 합은 3π

10. [출제의도] 일차변환의 역변환과 합성변환 이해하기

일차변환 f 의 역변환 f^{-1} 에 의하여

점 $(2, 4)$ 가 점 $(-1, 2)$ 로 옮겨지므로

일차변환 f 에 의하여 점 $(-1, 2)$ 는

점 $(2, 4)$ 로 옮겨진다.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = -2$$

합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 점 $(3, 2)$ 가 옮겨지는 점은

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

따라서 $(-4, 6)$

11. [A형 16번과 동일]

12. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(-x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \{f(x) + f(-x)\} = -2 + 2 = 0 \text{ (참)}$$

$$\therefore f(x) = t \text{라 하면 } x \rightarrow 1+0 \text{일 때 } t \rightarrow -1+0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+0} f(t) = 0 \text{ (거짓)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+0} \{f(x-1)\}^2 = \lim_{x \rightarrow +0} \{f(x)\}^2$$

$$= (-2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \{f(x-1)\}^2 = \lim_{x \rightarrow -0} \{f(x)\}^2$$

$$= 2^2 = 4$$

$$\{f(1-1)\}^2 = \{f(0)\}^2 = 2^2 = 4$$

$\therefore$ 함수 $\{f(x-1)\}^2$ 은 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

13. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$\overline{OP} = t + \frac{1}{t}, \quad \overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{2t}$$

$$f(t) = \overline{OP} \times \overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2t^2}$$

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{t^3} \text{ 이므로}$$

$$f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$$

14. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\angle QOP = \theta$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR} \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2t}\right)^2 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= \frac{1}{4t^2} \cos\theta$$

직각삼각형 PQO에서

$$\cos\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{\sqrt{2}}{2(t^2 + 1)} \text{ 이므로}$$

$$S(t) = \frac{\sqrt{2}}{8(t^4 + t^2)}$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow \infty} \{t^4 \times S(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}t^4}{8(t^4 + t^2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{8\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}$$

15. [A형 19번과 동일]

16. [A형 17번과 동일]

17. [출제의도] 정적분 이해하기

$$x^2 = t \text{라 하면 } 2x = \frac{dt}{dx} \text{이고}$$

$$x=1 \text{일 때 } t=1, \quad x=n \text{일 때 } t=n^2 \text{이므로}$$

$$f(n) = \int_1^{n^2} (x^2 e^{x^2} \times x) dx = \int_1^{n^2} \frac{1}{2} t e^t dt$$

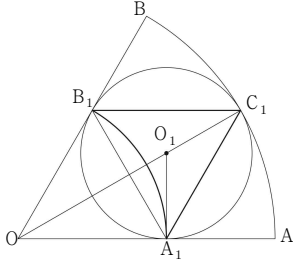
$$= \frac{1}{2} [t e^t - e^t]_1^{n^2} = \frac{1}{2} (n^2 e^{n^2} - e^{n^2} + e - e)$$

$$= \frac{e^{n^2}}{2} (n^2 - 1)$$

따라서 $\frac{f(5)}{f(3)} = \frac{12 \times e^{25}}{4 \times e^9} = 3e^{16}$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

부채꼴 OAB에서 원 O_1 의 중심을 O_1 이라 하자.



$\overline{OA_1} = \overline{OB_1}$ 이고 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 OA_1B_1 은 정삼각형이다.

직선 OC_1 은 점 O_1 을 지나므로

$\angle O_1OA_1 = \frac{\pi}{6}$ 이다.

원 O_1 의 반지름의 길이를 a 라 하면

$\overline{OA_1} = \sqrt{3}a$, $\overline{OO_1} = 2a$, $\overline{O_1C_1} = a$ 이므로

$\overline{OC_1} = 3a = 6$, $a = 2$ 이고

$\overline{OA_1} = 2\sqrt{3}$, $\overline{A_1C_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_1A_1} = 2\sqrt{3}$ 이다.

∇ 모양의 도형 $A_1C_1B_1$ 의 넓이는

두 정삼각형 OA_1B_1 , $A_1C_1B_1$ 의 넓이의 합에서

부채꼴 OA_1B_1 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

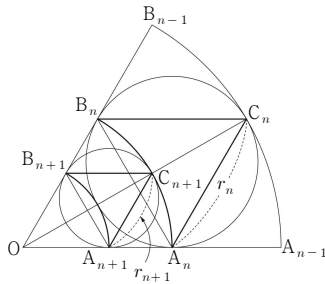
$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{3} \\ &= 6\sqrt{3} - 2\pi \end{aligned}$$

부채꼴 $OA_{n-1}B_{n-1}$ 에 내접하는 원 O_n 이

두 선분 OA_{n-1} , OB_{n-1} , 호 $A_{n-1}B_{n-1}$ 과

만나는 점을 각각 A_n , B_n , C_n 이라 하자.

(단, $A_0 = A$, $B_0 = B$ 이다.)



∇ 모양의 도형 $A_nC_nB_n$ 과

도형 $A_{n+1}C_{n+1}B_{n+1}$ 에서

$\overline{A_nC_n} = r_n$, $\overline{A_{n+1}C_{n+1}} = r_{n+1}$ 이라 하자.

$\overline{OC_{n+1}} = \overline{OA_n} = r_n$ 이고 $\overline{OA_{n+1}} = r_{n+1}$ 이므로

삼각형 $OA_{n+1}C_{n+1}$ 에서

$\angle OA_{n+1}C_{n+1} = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

코사인법칙에 의하여

$$r_n^2 = r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 - 2r_{n+1}^2 \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$r_n^2 = 3r_{n+1}^2$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}r_n$$

두 도형의 넓음비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$ 이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $6\sqrt{3} - 2\pi$ 이고

공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3} - 2\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 9\sqrt{3} - 3\pi$$

19. [출제의도] 분수방정식을 활용하여 추론하기

$$\frac{f(x)-2}{g(x)-2} - \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\frac{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 - 2\{f(x)-g(x)\}}{f(x)\{g(x)-2\}} = 0$$

$$\frac{\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)-2\}}{f(x)\{g(x)-2\}} = 0$$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)-2\} = 0$ 이고
 $f(x)\{g(x)-2\} \neq 0$ 이다.

i) $f(x) = g(x)$ 일 때

$x = -1$ 또는 $x = 2$

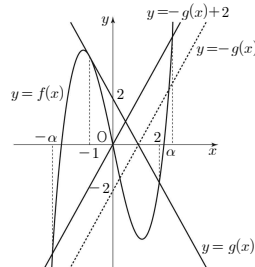
$f(-1) \neq 0$ 이고 $g(-1) - 2 > 0$

$f(2) \neq 0$ 이고 $g(2) - 2 < 0$

$\therefore x = -1$ 과 $x = 2$ 는 무연근이 아니므로

서로 다른 실근의 개수는 2

ii) $f(x) = -g(x) + 2$ 일 때



$y = -g(x) + 2$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, y 축의 방향으로

2만큼 평행이동시켜 얻은 그래프이다.

$y = f(x)$ 의 그래프와 $y = -g(x) + 2$ 의 그래프의 세 교점의 x 좌표는 $-\alpha$, 0 , α ($\alpha > 0$)이다.

$f(-\alpha) < 0$ 이고 $g(-\alpha) - 2 > 0$

$f(\alpha) > 0$ 이고 $g(\alpha) - 2 < 0$

$f(0) = 0$ 이므로

$x = -\alpha$, $x = \alpha$ 는 무연근이 아니고,

$x = 0$ 은 무연근이다.

$\therefore$ 서로 다른 실근의 개수는 2

i), ii)에서 서로 다른 실근의 개수는 4

20. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$

직선 $y = x$ 가 x 축과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$

$\angle POQ = \theta - \frac{\pi}{4}$ 이므로

직각삼각형 OQP에서

$$\overline{OQ} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q\left(\overline{OQ} \cos \frac{\pi}{4}, \overline{OQ} \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Q\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\cos \frac{\pi}{4}, \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\sin \frac{\pi}{4}\right) \text{이므로}$$

점 M의 y 좌표는

$$\frac{1}{2}\left\{\sin \theta + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\sin \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sin \theta + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin \theta\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin \theta + \frac{1}{2}\cos \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$\sin(\theta + \alpha) = 1$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 일 때

점 M의 y 좌표는 최대값을 갖는다.

따라서 $\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 3$$

21. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

$x \geq 0$ 일 때

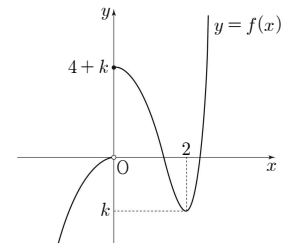
$$f'(x) = x(x-2)e^x \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 2$$

$$f(0) = 4 + k$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4 + k$	$\searrow$	k	$\nearrow$

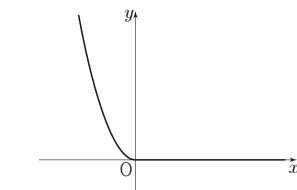
$y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$g(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ -2f(x) & (f(x) < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

k 의 값의 범위에 따라 $y = g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

i) $k \geq 0$ 일 때



$x = 0$ 에서 연속이고,

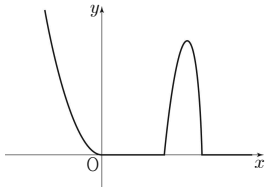
$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{0}{x} = 0 \text{이므로}$$

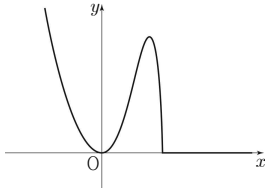
$x = 0$ 에서 미분가능하다.

$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

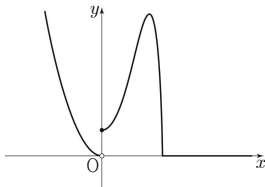
ii) $-4 < k < 0$ 일 때



∴ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2
iii) $k = -4$ 일 때



$x = 0$ 에서 연속이고
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$
이므로 $x = 0$ 에서 미분가능하다.
∴ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1
iv) $k < -4$ 일 때



∴ $x = 0$ 에서는 불연속이고,
연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1
i) ~ iv)에 의하여 $-4 < k < 0$ 이고
정수 k 의 개수는 3

22. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기

$\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

∴ $(k-1)(k-4) + 2 = 0$

$k^2 - 5k + 6 = 0, k = 2$ 또는 $k = 3$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 6

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x) = 3(x+1)^2 + \frac{1}{x}$

따라서 $f'(1) = 13$

24. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right) \times \frac{x^2}{1 - \cos \frac{x}{2}} \right\}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right) \times \frac{x^2 \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)}{\left(1 - \cos \frac{x}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right)} \right\}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x) \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right) \times \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \times 4 \times \left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) \right\}$

$= 1 \times 1 \times 4 \times 2 = 8$

25. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x) = \begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}} + C_1 & (x > 1) \\ x^2 + C_2 & (x < 1) \end{cases}$
(단, C_1, C_2 는 적분상수)

$f(4) = 16 + C_1 = 13$

$C_1 = -3$

$x = 1$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + C_2) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2x^{\frac{3}{2}} - 3 \right)$

$1 + C_2 = -1$

$C_2 = -2$

따라서 $f(-5) = 25 - 2 = 23$

26. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 추론하기

$a_1 = 3$

$a_2 = \frac{3+93}{2} = 48$

$a_3 = \frac{48}{2} = 24$

$a_4 = \frac{24}{2} = 12$

$a_5 = \frac{12}{2} = 6$

$a_6 = \frac{6}{2} = 3$

∴

$a_k = 3$ 을 만족시키는 50이하의 모든 자연수 k 는

1, 6, 11, 16, ..., 46

따라서 모든 자연수 k 의 값의 합은

$\sum_{m=1}^{10} (5m-4) = 5 \times \frac{10 \times (10+1)}{2} - 4 \times 10$
 $= 235$

27. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\{f(x)\}^2 + 3g(x) = 3$ 에서

$g(x) = \frac{3 - \{f(x)\}^2}{3}$ 이고 $0 \leq g(x) < 1$ 이므로

$0 \leq \frac{3 - \{f(x)\}^2}{3} < 1$

$0 < \{f(x)\}^2 \leq 3$

∴ $f(x) = 1$ 또는 $f(x) = -1$

i) $f(x) = 1$ 일 때

$g(x) = \frac{2}{3}$ 이므로 $\log x = \frac{5}{3} \therefore x = 10^{\frac{5}{3}}$

ii) $f(x) = -1$ 일 때

$g(x) = \frac{2}{3}$ 이므로 $\log x = -\frac{1}{3} \therefore x = 10^{-\frac{1}{3}}$

i), ii)에 의하여 $x = 10^{\frac{5}{3}}$ 또는 $x = 10^{-\frac{1}{3}}$

모든 x 의 값의 곱은 $10^{\frac{4}{3}}$

따라서 $p = 3, q = 4$ 이고 $10(p+q) = 70$

28. [출제의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 $OQ_k B$ 에서

$\angle OBQ_k = \angle AOP_k = \frac{k\pi}{2n}$ 이고 $\overline{OB} = 8$ 이므로

$\overline{OQ_k} = 8 \sin \frac{k\pi}{2n}, \overline{BQ_k} = 8 \cos \frac{k\pi}{2n}$

$S_k = \frac{1}{2} \times \overline{OQ_k} \times \overline{BQ_k}$

$= \frac{1}{2} \times 8 \sin \frac{k\pi}{2n} \times 8 \cos \frac{k\pi}{2n} = 16 \sin \frac{k\pi}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = 16 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$
 $= 16 \int_0^1 \sin \pi x dx = 16 \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 = \frac{32}{\pi}$

따라서 $\alpha = 32$

29. [출제의도] 일차변환을 활용하여 문제해결하기

주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $\frac{n\pi}{24}$ 만큼

회전하는 회전변환이다.

세 직선 OA, OB, OC가 x 축과 이루는 각의 크기는

각각 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \alpha$ (단, $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$) 이므로

직선 OA가 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 와 이루는

각의 크기는 $\frac{5\pi}{12}$ 또는 $\frac{17\pi}{12}$ 이고,

직선 OB가 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 와 이루는

각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2}$ 이다.

삼각형 A'B'C'과 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 가 만나도록 하려면

i) $\frac{5\pi}{12} \leq \frac{n\pi}{24} \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$10 \leq n \leq 12 \therefore n = 10, 11, 12$

ii) $\frac{17\pi}{12} \leq \frac{n\pi}{24} \leq \frac{3\pi}{2}$ 이므로

$34 \leq n \leq 36 \therefore n = 34, 35, 36$

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n 의 값의 합은 138

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

t 초가 되는 순간 점 P의 좌표는 $(2t, 0)$

$\angle QOP = \theta$ 라 하면, $\angle AOQ = \frac{\pi}{3} - \theta$

부채꼴 OQA의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 10^2 \times \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) = 50 \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$

삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 10 \times 2t \times \sin \theta = 10t \sin \theta$

$S = 50 \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) + 10t \sin \theta$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$\frac{dS}{dt} = -50 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta + 10t \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \dots \dots \textcircled{1}$

점 P $(2t, 0)$ 을 지나고 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 평행한

직선을 l 이라 하면

직선 l 의 방정식은 $y = \sqrt{3}(x - 2t)$ 이고

직선 l 과 원이 만나는 점 Q의 좌표는

$Q(10 \cos \theta, 10 \sin \theta)$ 이므로 직선 l 에 대입하면

$10 \sin \theta = \sqrt{3}(10 \cos \theta - 2t) \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{3}\left(-10\sin\theta\frac{d\theta}{dt}-2\right)\dots\dots\textcircled{B}$$

점 Q 의 y 좌표가 5 이므로

$$\sin\theta=\frac{1}{2},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ 이고}$$

$$\textcircled{A}\text{ 에 서 }t=\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ 이고}$$

$$\textcircled{B}\text{ 에 서 }\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{5}\text{ 이다.}$$

$$\textcircled{C}\text{ 에 의 하여 }\frac{dS}{dt}=10$$