

수학 A책형

1. 정답 ④

① (거짓)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

② (거짓)

$$n(A \cup B^c) = n(U) - n(B - A)$$

③ (거짓)

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

④ (참)

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

2. 정답 ④

① (거짓)

(라)는 함수의 그래프가 아니다.

② (거짓)

(나)는 상수함수이다.

③ (거짓)

(다)는 상수함수가 아니다.

④ (참)

(가)는 일대일함수 그래프이다.

3. 정답 ①

$$\sin(100) = \sin 2\pi = 0$$

$$\sin(90) = \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$

$$\sin(80) = \sin(2\pi - 2\theta) = -\sin 2\theta$$

$$\sin(70) = \sin(2\pi - 3\theta) = -\sin 3\theta$$

$$\sin(60) = \sin(2\pi - 4\theta) = -\sin 4\theta$$

$$\sin(50) = \sin\pi = 0$$

$$\therefore \sin\theta + \sin(2\theta) + \dots + \sin(10\theta) = 0$$

4. 정답 ④

$$x + y = 2\sqrt{5}, xy = 4 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= (x + y)^2 - 4xy \\ &= (2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 4 = 4 \end{aligned}$$

$$x > y \text{ 이므로 } x - y = 2$$

$$\therefore \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{(x - y)(x + y)}{xy} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$$

5. 정답 ①

$$\text{연산 } * \text{의 항등원을 } e \text{라 하면 } a * e = a + e + 4 = a$$

$$\therefore e = -4$$

$$2 * x = 2 + x + 4 = -4$$

$$x = -10$$

$$\therefore 2 \text{의 역원은 } -10$$

6. 정답 ③

$$z = xy + (x + y)i, \bar{z} = xy - (x + y)i$$

$$z + \bar{z} = xy + (x + y)i + xy - (x + y)i = 2xy = 4$$

$$\therefore xy = 2$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (xy + (x + y)i)(xy - (x + y)i) = (xy)^2 + (x + y)^2 \\ &= 4 + (x + y)^2 = 13 \end{aligned}$$

$$\therefore (x + y)^2 = 9$$

$$\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 9 - 4 = 5$$

7. 정답 ①

A(5, 0), P(x, y) 라 하면

$$\overline{PO} = \overline{PA} = 3 : 2 \Rightarrow 3\overline{PA} = 2\overline{PO}$$

$$3\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$9(x - 5)^2 + 9y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$5x^2 - 90x + 225 + 5y^2 = 0$$

$$x^2 - 18x + 45 + y^2 = 0$$

$$(x - 9)^2 + y^2 = 6^2$$

$$\therefore \text{점 P가 그리는 도형의 길이는 } 2\pi \cdot 6 = 12$$

8. 정답 ①

코사인 제2법칙에서

$$(2\sqrt{3})^2 = (\overline{AB})^2 + 4^2 - 2 \cdot (\overline{AB}) \cdot 4 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AB}^2 - 4\overline{AB} + 4 = 0$$

$$(\overline{AB} - 2)^2 = 0 \quad \therefore \overline{AB} = 2$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

9. 정답 ②

$$y = \frac{x - 1}{x - 2} \text{의 역함수는}$$

$$x = \frac{y - 1}{y - 2} \Rightarrow xy - 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow (x - 1)y = 2x - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x + a}{bx + c} \text{이므로 } a = -1, b = 1, c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

10. 정답 ③

산술기하 평균에서

$$a^2 + c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2b^2 = a^2 + c^2 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{식은 } 2b^2 \geq 2ab \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2b^2 - b^2}{2ac} = \frac{b^2}{2ac}$$

②에서 $2ab = 2b^2$ 일 때 $2ac$ 는 최대가 되고

$\cos B$ 는 최솟값을 갖는다.

$$\cos B = \frac{b^2}{2b^2} = \frac{1}{2}$$

∴ B는 $\frac{\pi}{3}$ 일 때 최대이다.

11. 정답 ③

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b & ab + b^2 \\ a + b & b + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b + b^2 = 6$$

$$b^2 + b - 6 = 0$$

$$(b+3)(b-2) = 0 \text{에서 } b = -3 \text{ 또는 } b = 2$$

$$b = 2 \text{이면 } a + b = -2 \text{에서 } a = -4$$

$$\text{그런데 } a^2 + b = -2 \text{에서 } 16 + 2 = -2 \text{이므로 모순이다.}$$

$$b = -3 \text{이면 } a + b = -2 \text{에서 } a = 1$$

$$\therefore a - b = 1 + 3 = 4$$

12. 정답 ②

$$y = 3^x \text{ 과 } y = 3 \text{의 교점은 } 3 = 3^x, x = 1 \quad \therefore P(1, 3)$$

$$y = \frac{3^x}{9} \text{ 과 } y = 3 \text{의 교점은 } 3 = \frac{3^x}{9}, x = 3 \quad \therefore Q(3, 3)$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2$$

13. 정답 ②

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \text{에서}$$

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 3, a_3 = 2a_2 - 1 = 5,$$

$$a_4 = 2a_3 - 1 = 9, a_5 = 2a_4 - 1 = 17,$$

$$a_6 = 2a_5 - 1 = 33, a_7 = 2a_6 - 1 = 65,$$

$$a_8 = 2a_7 - 1 = 129, a_9 = 2a_8 - 1 = 257,$$

$$a_{10} = 2a_9 - 1 = 513$$

14. 정답 ①

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \frac{1}{100} \text{의 양변에 로그를 취하면}$$

$$\log\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \log\frac{1}{100} \Rightarrow n(\log 2 - \log 5) \leq -2$$

$$\Rightarrow n(\log 2 - 1 + \log 2) \leq -2$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{-2}{2\log 2 - 1} = \frac{-2}{-0.398} = 5.02 \dots$$

$$\therefore n = 6$$

15. 정답 ②

$$f(a, b) = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$f(k, k+1) = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{f(k, k+1)} = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= \cancel{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}} + \dots + \sqrt{100} - \cancel{\sqrt{99}} \\ = -1 + 10 = 9$$

16. 정답 ③

$$\neg. f(1) \text{이 존재하지 않는다.} \quad \therefore \text{불연속}$$

$$\sqcup. \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{가 존재하지 않는다.} \quad \therefore \text{불연속}$$

$$\sqsubset. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 = f(1) \quad \therefore \text{연속}$$

$$\sqsupset. f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \therefore \text{연속}$$

17. 정답 ④

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \\ = f'(1) \cdot \frac{1}{2} = 2 = g(1)$$

$$\therefore f'(1) = 4$$

18. 정답 ②

구간 $[b, c]$ 에서 $f(x)$ 가 음수이므로 정적분 값도 음수가 된다.

∴ $g(b)$ 일 때 최댓값을 갖는다.

19. 정답 ④

$$\int_0^1 ax(1-x)dx = \frac{a}{6} = 1$$

$$\therefore a = 6$$

$$P\left(0 \leq x \leq \frac{3}{4}\right) = \int_0^{\frac{3}{4}} 6x(1-x)dx$$

$$= 6 \int_0^{\frac{3}{4}} (-x^2 + x)dx$$

$$= 6 \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{27}{32}$$

20. 정답 ②

이웃해도 되는 5명부터 나열한 후 양끝 또는 사이사이에 4명을 세우면 된다.

$$\frac{5! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{9!} = \frac{5}{42}$$