수 학

해설위원 : 곽 윤 근 교수

본 문제의 소유권 및 판권은 (주)윌비스고시학원에 있습니다. 무단복사 판매 시 저작권법에 의거 경고조치 없이 고발하여 민·형사상 책임을 지게 됩니다.

○ 반드시 OMR카드에 성명, 주민등록번호를 기재하시기 바랍니다.

○ OMR카드 작성시 컴퓨터용 사인펜으로 작성해주시기 바랍니다.

<총 평>

2015년 6월 13일 시행된 서울시 9급 수학문제는 예년도 보다 더 평이했다.

또한 기본적이고 교과념적인 문제로 출제되었으며, 각단원 고르게 출제하려 노력했다.

그리고 지수로그함수와 방정식 부등식 실수 유리수 무리수등 기본적인 연산이나 개념에 의한 문제보다는 미분,적분 상용로그등 수학1 분야의 개념에 의한 문제로 고르게 출제되었다.

그러므로 앞으로 수험생은 기본적인 개념에 의한 문제유형에 충실하게 준비한다면 확실한 점수를 단시간에 확보할 수 있을 것이다.

01. 다음 중 역, 이, 대우가 모두 참인 명제는?

① 직사각형은 두 대각선의 길이가 같다.

② x, y가 실수이면 $x+y$도 실수이다.

③ 무한소수는 무리수이다.

④ $xy<0$이면 $|x|+|y|>|x+y|$이다.

(1)

역, 이, 대우 모두 참이 되려면 필요충분조건이 성립해야 한다

④ $xy<0$이면 $|x|+|y|>|x+y|$에서

$(|x|+|y|)^2>|x+y|^2$

$x^2+y^2+2|xy|>x^2+y^2+2xy$

$|xy|>xy$ 이므로

필요충분조건이 성립한다

답 ④

02. 이차부등식 $-x^2+(k+2)x-(2k+1)\geq 0$의 해가 존재하지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 2

② 3

③ 4

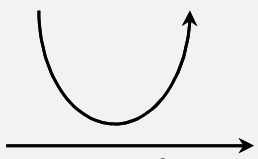
④ 5

(2)

$-x^{2+}(k+2)x-(2k+1)\geq 0$

$x^2-(k+2)x+(2k+1)\leq 0$

모든 실수x에 대해 성립하지 않아야 하므로



$D=(k+2)^2-4(2k+1)<0$

$k^2-4k<0$

$0<k<4$ k=1, 2, 3

답 ②

03. 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 정수 k의 개수는?

① 8

② 9

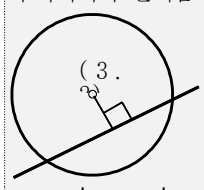
③ 10

④ 11

(3)

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$

$y=2x+k$ 가 두 점에서 만나려면 (3.2)에서 $2x-y+k=0$까지 수직거리가 반지름보다 작거나 $D>0$일 때이므로



$d=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$

$-9<k<1$

$|k+4|<5$

답 ②

04. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$에 대하여 A^{10}의 $(1,2)$성분을 a, B^{10}의 $(2,1)$성분을 b라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 30

② 40

③ 50

④ 60

(4)

$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

$A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$, $B^n=\begin{pmatrix}1&0\\3n&1\end{pmatrix}$

$A^{10}=\begin{pmatrix}1&20\\0&1\end{pmatrix}$, $B^{10}=\begin{pmatrix}1&0\\30&1\end{pmatrix}$

$a=20$, $b=30$

$a+b=50$

답 ③

05. a^{100}, b^{100}이 각각 48자리 수, 85자리 수 일 때, $(ab)^{30}$의 자리 수는?

① 39

② 40

③ 41

④ 42

(5)

$47\leq \log a^{100}<48$

$84\leq \log b^{100}<85$

$\frac{47}{100}\leq \log a<\frac{48}{100}-①$

$\frac{84}{100}\leq \log b<\frac{85}{100}-②$

①+②

$\frac{131}{100}\times 30\leq 30\log ab<30\times\frac{133}{100}$

$39.3\leq \log(ab)^{30}<39.9$

$\log(ab)^{30}$의 지표는 39이므로 40자리이다

답 ②

06. 좌표평면 위의 점 $P(-3,4)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라고 할 때, 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, O는 원점이다.)

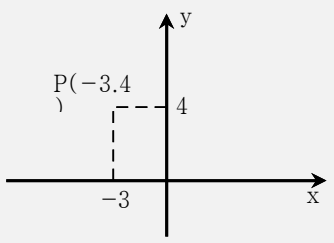
<보 기>

ㄱ. $\cos\theta\cdot\tan\theta=\frac{4}{5}$ ㄴ. $\sin(\pi+\theta)=-\frac{4}{5}$

ㄷ. $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{4}{5}$

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(6)



㉠ $\cos\theta=-\frac{3}{5},\tan\theta=-\frac{4}{3}$

$\cos\theta\times\tan\theta=\frac{4}{5}$

㉡ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{4}{5}$

㉢ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta=\frac{4}{5}$

답 ④

07. 방정식 $x^3=3x^2-4+a$가 서로 다른 두 개의 양근과 하나의 음근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값들의 합은?

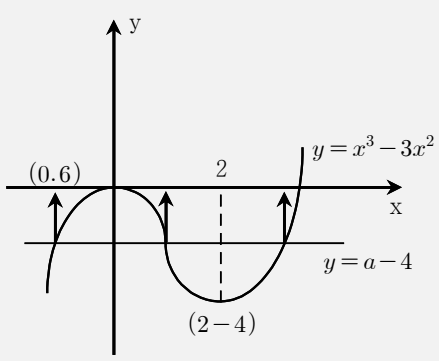
① 4
② 6
③ 8
④ 10

(7)

$x^3-3x^2=a-4$

$\begin{cases}y=x^3-3x^2\\ y=a-4\end{cases}\rightarrow y'=3x^2-6x=0$

$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$



양의 근 2개 음의 근 1개

$-4<a-4<0$

$0<a<4\quad a=1,2,3$

답 ②

08. $f(x)=3x^2-6x$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(1+\frac{2k}{n})\frac{3}{n}$의 값은?

① 3
② 6
③ 9
④ 12

(8)

$f(x)=3x^2-6x$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{70}f(1+\frac{2k}{n})\frac{3}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(1+\frac{2k}{n})$

$=\frac{3}{2}\int_1^3 f(x)dx$

$=\frac{3}{2}\int_1^3(3x^2-6x)dx$

$=\frac{3}{2}[x^3-3x^2]_1^3$

$=3$

답 ①

09. $a_n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot\frac{1}{4}+{}_nC_2\cdot(\frac{1}{4})^2+\cdots+{}_nC_n\cdot(\frac{1}{4})^n$을 만족할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ 2
④ 4

(9)

$(x+1)^n={}_nc_0+{}_nc_1x+{}_nc_2x^2+\ldots+{}_nc_nx^n$

$x=\frac{1}{4}$

$a_n=\left(\frac{5}{4}\right)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$

답 ④

10. 어떤 공장에서 생산되는 제품의 유통기한은 평균이 100일, 표준편차가 10일인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사의 제품 중 16개를 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 확률 $P(\overline{X} \geq 95)$의 값은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

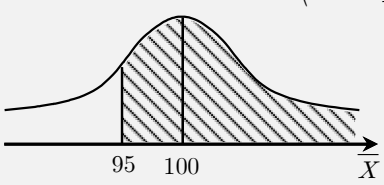
① 0.84
② 0.93
③ 0.98
④ 0.99

(10)

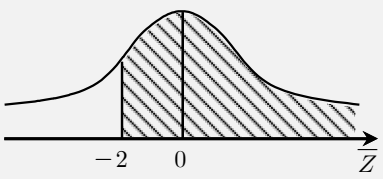
$N(100, 10^2)$ $n=16$

$p(\overline{x} \geq 95)$

$N(100 n 10^2) \xrightarrow{n=16} \overline{N}\left(100, \frac{10^2}{16}\right) = \overline{N}\left(100, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$



$\overline{z} = \frac{95-100}{\frac{5}{2}} = -2$



$P(\overline{x} \geq 95) = P(\overline{z} \geq -2)$

=0.5+0.48

=0.98

답 ③

11. x에 대한 다항식 $2x^5 + ax^4 + bx + 1$이 $x^4 - 1$을 인수로 가질 때, $\frac{a}{b}$값은?(단, a, b는 상수이다.)

① -2
② $-\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{2}$
④ 2

(11)

$2x^5 + ax^4 + bx + 1 = (x^4 - 1)(\ \ )$

$x = 1 \quad 2 + a + b + 1 = 0$ -①

$x = -1 \quad -2 + a - b + 1 = 0$ -②

①+② $a = -1 \quad b = -2$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

답 ③

12. 두 실수 a, b에 대하여 $a^3 = 5\sqrt{2} + 7$, $b^3 = 5\sqrt{2} - 7$일 때, $a - b$의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4

(12)

$a^3 = 5\sqrt{2} + 7$ -①

$b^3 = 5\sqrt{2} - 7$ -②

$a^3 - b^3 = 14$

$a^3 b^3 = 50 - 49 = 1 \rightarrow ab = 1$

$a - b = x$ 라면

$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$14 = x^3 + 3x$

$x^3 + 3x - 14 = 0 \quad x = 2$

답 ②

13. 두 함수 $y = 2x^2$과 $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$의 그래프가 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리는?

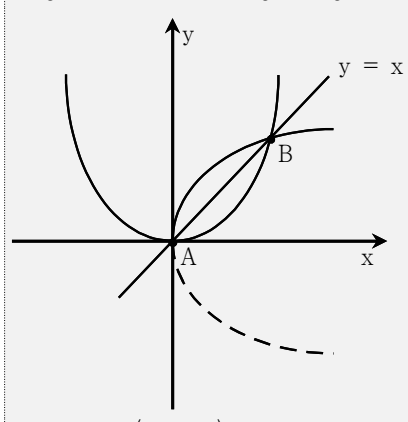
① $\frac{\sqrt{2}}{2}$
② 1
③ $\sqrt{2}$
④ 2

(13)

$y = 2x^2$

$y = \sqrt{\frac{x}{2}} \rightarrow y^2 = \frac{x}{2} \quad x = 2y^2$

$\therefore y = 2x^2$ 와 $x = 2y^2$ 은 $y = x$대칭 ($x \geq 0,\ y \geq 0$)



$A(0,6)\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

↑ $y = x$, $y = 2x^2$ 의 교점

$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ①

14. 행렬 $A=\begin{pmatrix}x & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & 5\\ -2 & x-7\end{pmatrix}$에 대하여 A의 역행렬은 존재하지만 B의 역행렬이 존재하지 않을 때, 실수 x의 값은?

① 2
② 3
③ 5
④ 7

(14)
$A=\begin{pmatrix}x & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$의 $A-1$ 존재
$D_A=8x-16\neq 0 \quad x\neq 2$
$B=\begin{pmatrix}x & 5\\ -2 & x-7\end{pmatrix}$의 B^{-1}존재하지 않으려면
$D_B=x(x-7)+10=0$
$x^2-7x+10=0 \quad x=20r \quad x=5$
$x\neq 2$이므로 $x=5$

답 ③

15. 제6항이 8이고, 제21항이 -22인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음이 되는 항은 제 몇 항인가?

① 9
② 10
③ 11
④ 12

(15)
$a_6=8 \quad a_{21}=-22$
$a+5d=8$
$a+20d=-22$
$d=-2 \quad a=18$
$a_n=18+(n-1)(-2)<0$
$18=2n-2$
$2+18<2n$
$20<2n$
$10<n$
11항부터 음수항

답 ③

16. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+3n$일 때, $\sum_{k=1}^{8}\frac{40}{a_k a_{k+1}}$의 값은?

① 2
② 3
③ 4
④ 5

(16)
$S_n=n^2+3n$
$S_{n-1}=(n-1)^2+3(n-1)$
$a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geq 2)$
S_n 의 상수항이 0이므로
$a_n=2n+1$
$\sum_{k=1}^{8}\frac{40}{a_k a_{k+1}}$
$=40\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$
$=10\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$
$=10\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$
$=10\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)=5-1=4$

답 ③

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-\frac{12n+3}{2n+5})=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n-6n}{na_n+3}$의 값은?

① -3
② -2
③ 2
④ 3

(17)
$\lim_{n\to\infty}\left(3a_n-\frac{12n+3}{2n+5}\right)=0$
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to 70}\frac{4n+1}{2n+5}=2$
$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n-6n}{na_n+3}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-6n}{2n+3}=-3$

답 ①

18. 함수 $f(x)=-x^3+2x^2+kx+3$이 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$를 만족한다. 이 때 정수 k의 최댓값은?

① -2
② -1
③ 0
④ 1

(18)

$f(x)=-x^3+2x^2+kx+3$

$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f(x)$는 감소함수이므로

$f'(x)=-3x^2+4x+k<0$

$D/_4 = 4-(-3k)<0$

$k \leftarrow \frac{4}{3}$

k의 최대 정수는 -2이므로

정답 ①

19. 50,000원권 지폐 8장이 있다. A, B, C, D 네 사람에게 적어도 한 장씩 나누어 주려고 한다. C, D 두 사람에게는 같은 액수를 주기로 할 때, 나누어 줄 수 있는 모든 경우의 수는?

① 9
② 10
③ 11
④ 12

(19)

A,B,C,D에 적어도 한 장씩 받아야 하므로

①

A	B	C	D
1	1	1	1
		▢	▢

A,B,C,D에 1장씩 배정하고 나머지 4장을 AB에 배정하기

(4.0) (0.4) (3.1) (1.3) (2.2) (모두 5가지)

②

A	B	C	D
1	1	2	2

⇒ 나머지 2장을 A,B에 나눠주기

(1.1) (2.0) (0.2) (모두 3가지)

③

A	B	C	D
1	1	3	3

1가지

5+3+1=9가지

답 ①

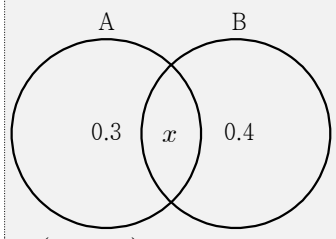
20. 두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cap B^c)=0.3$, $P(A^c\cap B)=0.4$, $P(A^c\cap B^c)=0.1$일 때, $P(A|B)$의 값은?

① $\frac{1}{12}$
② $\frac{1}{6}$
③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{3}$

(20)

$P(A\cap B^c)=0.3 \quad P(A^c\cap B)=0.4$

$P(A^c\cap B^c)=0.1 \rightarrow P(A\cup B)=0.9$



$P(A\cap B)=0.2$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$

답 ④