

2015학년도 대학수학능력시험  
수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ⑤ 02. ③ 03. ① 04. ② 05. ④  
06. ③ 07. ① 08. ② 09. ② 10. ①  
11. ⑤ 12. ① 13. ③ 14. ④ 15. ④  
16. ⑤ 17. ③ 18. ⑤ 19. ② 20. ④  
21. ① 22. 26 23. 8 24. 25 25. 20  
26. 220 27. 12 28. 96 29. 9 30. 39

1. 출제의도 : 행렬의 덧셈을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은

$$2+2+3+2=9$$

<답> ⑤

2. 출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln e$$

$$= \frac{1}{3}$$

<답> ③

3. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)$$

$$= \sin x + \sqrt{7} \cos x - \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin x + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cos x \right) - \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \sin(x+\alpha) - \sqrt{2}$$

$$(\text{단, } \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}})$$

따라서, 함수  $f(x)$ 의 최댓값은

$$\sin(x+\alpha) = 1 \text{ 일 때}$$

$$2\sqrt{2} \times 1 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

<답> ①

4. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 3\sqrt{x} dx$$

$$= [2x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = 2$$

<답> ②

5. 출제의도 : 내분점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분  $AB$ 를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left( \frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times a}{2+1} \right)$$

$$\left(4, \frac{a-6}{3}, \frac{2b-2}{3}\right) \text{이고 이 점이 } x \text{축}$$

위에 있으므로

$$\frac{a-6}{3}=0, \frac{2b-2}{3}=0$$

따라서,  $a=6, b=1$ 이므로

$$a+b=7$$

<답> ④

공비가  $r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{9}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{9}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{81}{8}$$

<답> ①

6. 출제의도 : 합성변환에 의하여 옮겨진 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

합성변환  $f \circ g$ 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} a \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a=3$$

<답> ③

8. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A^C$ 과  $B$ 는 서로 배반사건이므로

$$P(A^C \cap B) = 0$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(B) = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

<답> ②

7. 출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

수열  $\{a_n^2\}$ 은

첫째항이  $a_1^2 = 9$ 이고,

9. 출제의도 : 정적분의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n}$$

$$= \int_1^3 f(x) dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= [\ln x]_1^3 = \ln 3$$

<답> ②

$$= P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$$

<답> ⑤

10. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y^2 = 12x = 4 \times 3x$  에서  $F(3,0)$  이고 준선의 방정식은  $x = -3$  이다.

$$\therefore A(1, 2\sqrt{3})$$

따라서, 두 점  $A, F$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{3}(x-3)$$

이므로 점  $B$ 의  $x$ 좌표는

$$\{-\sqrt{3}(x-3)\}^2 = 12x \quad (x-3)^2 = 4x$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0, \quad (x-1)(x-9) = 0$$

$$\therefore x = 9 \quad (\because x > 1)$$

$$\therefore \overline{BD} = 9 - (-3) = 12$$

<답> ①

12. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분  $AB$ 의 중점을  $M$ 이라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AB} = 6$$

이므로

$$\overline{PM} \perp \overline{AB}$$

또한,  $\overline{PH} \perp \alpha$  이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HM} \perp \overline{AB}$$

따라서,

$$\overline{PM} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}, \quad \overline{PH} = 4$$

이므로

$$\overline{HM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{11}$$

<답> ①

11. 출제의도 : 정규분포를 따를 때 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

과자 1봉지의 무게를 확률변수  $X$ 라 하면  $X$ 는 정규분포  $N(75, 2^2)$ 을 따르므로

$$P(76 \leq X \leq 78)$$

$$= P\left(\frac{76-75}{2} \leq Z \leq \frac{78-75}{2}\right)$$

13. 출제의도 : 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a > 3 \text{ 이므로 } \frac{a}{3} > 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^k}{\frac{a}{3} + \frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^k}{\frac{a}{3} + 0} = \left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}$$

또한, 두 곡선  $y = a^{x-1}$ ,  $y = 3^x$ 의 교점의  $x$ 좌표가  $k$ 이므로

$$a^{k-1} = 3^k = 3^{k-1} \times 3$$

$$\therefore \frac{a^{k-1}}{3^{k-1}} = \left(\frac{a}{3}\right)^{k-1} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1} + 1} = \left(\frac{a}{3}\right)^{k-1} = 3$$

<답> ③

14. 출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y' = 3^x \ln 3$  이므로 곡선  $y = 3^x$ 에 접하는 접선의 방정식은

$$y - 3^k = 3^k \ln 3 (x - k)$$

따라서 점  $A$ 의  $x$ 좌표는

$$-3^k = 3^k \ln 3 (x - k) \quad x - k = -\frac{1}{\ln 3}$$

$$\therefore x = k - \frac{1}{\ln 3}$$

$y' = a^{x-1} \ln a$  이므로 곡선  $y = a^{x-1}$ 에 접하는 접선의 방정식은

$$y - a^{k-1} = a^{k-1} \ln a (x - k)$$

따라서 점  $B$ 의  $x$ 좌표는

$$-a^{k-1} = a^{k-1} \ln a (x - k) \quad x - k = -\frac{1}{\ln a}$$

$$\therefore x = k - \frac{1}{\ln a}$$

따라서,

$$\overline{AH} = k - \left(k - \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 3}$$

$$\overline{BH} = k - \left(k - \frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}$$

이므로

$$\frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln a}, \quad \ln a = \ln 9$$

$$\therefore a = 9$$

<답> ④

15. 출제의도 : 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

남학생의 수를  $n$ 이라 하면 여학생의 수는  $320 - n$ 이므로 수학동아리에 가입한 남학생의 수와 여학생의 수는 각각

$$0.6n, 160 - 0.5n$$

이다.

따라서, 수학동아리에 가입한 학생수는

$$0.6n + (160 - 0.5n) = 0.1n + 160$$

이므로

$$p_1 = \frac{0.6n}{0.1n + 160}$$

$$p_2 = \frac{160 - 0.5n}{0.1n + 160}$$

이때,  $p_1 = 2p_2$  이므로

$$\frac{0.6n}{0.1n+160} = \frac{2(160-0.5n)}{0.1n+160}$$

$$0.6n = 320 - n, \quad 1.6n = 320$$

$$\therefore n = 200$$

<답> ④

16. 출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\neg. A^2 - AB = 3E \text{에서}$$

$$A(A-B) = 3E \text{이므로}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A-B) \quad (\text{참})$$

$$\sqsubset. A \left\{ \frac{1}{3}(A-B) \right\} = \frac{1}{3}(A-B)A = E$$

이므로

$$A(A-B) = (A-B)A$$

$$A^2 - AB = A^2 - BA$$

$$\therefore AB = BA \quad (\text{참})$$

$$\sqsupset. AB = BA \text{이므로}$$

$$A^2B - B^2A = A^2B - AB^2$$

또,  $A^2 - AB = 3E$ 의 양변에  $B$ 를 곱하면

$$A^2B - AB^2 = 3B$$

$$\text{따라서 조건 } A^2B - B^2A = A + B \text{에서}$$

$$3B = A + B, \quad A = 2B$$

이므로

$$A^2 - AB = 3E \text{에 대입하면}$$

$$(2B)^2 - 2BB = 3E$$

$$4B^2 - 2B^2 = 3E$$

$$2B^2 = 3E$$

$$\therefore B^2 = \frac{3}{2}E$$

$$\therefore (A+2B)^2 = (2B+2B)^2$$

$$= 16B^2$$

$$= 16 \times \frac{3}{2}E$$

$$= 24E \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은  $\neg$ ,  $\sqsubset$ ,  $\sqsupset$ 이다.

<답> ⑤

17. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{에서}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

이때,  $n$ 에  $1, 2, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하면

$$b_2 - b_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$b_3 - b_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

위의 식을 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 더하면

$$b_n - b_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore b_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

따라서,

$$S_n = (n+1)! \times b_n = (n+1)! \times \frac{n}{n+1} = n \times n!$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= nS_{n-1} + (n-1)! \\ &= n\{(n-1) \times (n-1)!\} + (n-1)! \\ &= (n^2 - n + 1)(n-1)! \end{aligned}$$

따라서,  $f(n) = n$ ,  $g(n) = n^2 - n + 1$  이므로

$$f(7) + g(6) = 7 + 31 = 38$$

<답> ③

18. 출제의도 : 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\bar{X} = 2$ 인 경우는

(1, 3), (3, 1), (2, 2)

이므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} = 2) &= \frac{1}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{8} \times \frac{2}{8} \\ &= \frac{5+5+4}{64} \\ &= \frac{7}{32} \end{aligned}$$

<답> ⑤

19. 출제의도 : 직선과 평면의 방정식을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

평면  $\alpha$ 의 법선벡터는 (2, -1, 1)이므로 평면  $\alpha$ 의 방정식은

$$2(x-2) - (y-5) + (z-7) = 0$$

$$2x - y + z = 6$$

또한,  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}|^2 = 6$  에서

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{6}$$

따라서,  $\frac{x}{2} = 6 - y = z - 6 = t$  ( $t > 0$ )라

하면

$$a = 2t, \quad b = 6 - t, \quad c = t + 6$$

이므로  $A(2t, 6-t, t+6)$ 이고 점 A와 평면  $\alpha$  사이의 거리가  $\sqrt{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} &\frac{|2 \times 2t - (6-t) + t + 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|6t - 6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$|t - 1| = 1$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore a + b + c = 2t + 12 = 16$$

<답> ②

20. 출제의도 : 도형의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

내접원과 선분 AC의 접점을 M이라 하면

$$\overline{AM} = \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\overline{AM}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2}}$$

또한, 선분 AD의 연장선에 점 C에서 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}
\overline{CH} &= \overline{BC} \times \sin 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2}} \\
\therefore \overline{CD} &= \frac{\overline{CH}}{\sin 3\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}} \\
\therefore S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \sin \theta \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \theta \tan \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \cos \theta \tan \frac{\theta}{2}} \times \sin \theta \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \frac{\theta}{2} \sin 3\theta \cos \theta} \\
\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \{\theta \times S(\theta)\} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \left( \frac{\frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}} \right)^2 \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{4}{3} \right\} \\
&= 1^2 \times 1^2 \times 1 \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

<답> ④

<다른 풀이>

내접원과 선분 AB의 접점을 E라 하면

$$\begin{aligned}
\overline{AE} &= \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \\
\overline{BE} &= \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan \theta \\
\therefore \overline{AB} = \overline{BC} &= \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} + \tan \theta
\end{aligned}$$

또한,

$$\overline{AC} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{BD}$$

$$= \overline{BC} : \overline{BD}$$

이므로

$$\overline{BC} \times \overline{CD} = \overline{AC} \times \overline{BD}$$

이때,

$$\overline{AC} = 2\overline{AE} = \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2}}$$

이고 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{BD}}{\sin \theta} &= \frac{\overline{BC}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} + \tan \theta}{\sin 3\theta} \\
\therefore \overline{BD} &= \sin \theta \left( \frac{\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} + \tan \theta}{\sin 3\theta} \right)
\end{aligned}$$

$\therefore S(\theta)$

$$= \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{CD} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \times \overline{BD} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2}} \times \frac{\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} + \tan \theta}{\sin 3\theta} \times \sin^2 \theta$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \times \frac{\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} + \tan \theta}{\sin 3\theta} \times \sin^2 \theta$$

$$= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \times \frac{\sin^2 \theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \{\theta \times S(\theta)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ 2 \times \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \times \cos \frac{\theta}{2} \times \left( 2 \times \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) \right\} \\
&\times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{1}{3} \\
&= 2 \times 1 \times 1 \times (2 \times 1 \times 1 \times 1 + 0) \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

21. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점  $B(1,0)$ ,  $C(2^m, m)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{m}{2^m - 1}(x - 1)$$

이므로 점  $D$ 의 좌표는

$$D(2^n, \frac{m}{2^m - 1}(2^n - 1))$$

따라서, 삼각형  $ABD$ 의 넓이가  $\frac{m}{2}$ 보다

작거나 같으므로

$$\frac{1}{2} \times (2^n - 1) \times \frac{m}{2^m - 1}(2^n - 1) \leq \frac{m}{2}$$

$$(2^n - 1)^2 \leq 2^m - 1$$

이때,  $n = 1$  이면

$$1 \leq 2^m - 1, \quad 2 \leq 2^m \quad \text{이므로 } a_1 = 1$$

또한, 2이상의 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$(2^n - 1)^2 \leq 2^{2n} - 1$$

이므로  $2n \leq m$  이면 된다.

$$\therefore a_1 = 1, \quad a_n = 2n (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= a_1 + \sum_{n=2}^{10} 2n \\
&= 1 + \frac{9(4+20)}{2} = 109
\end{aligned}$$

<답> ①

22. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2(x+6) = 5 \text{에서}$$

$$x+6 = 2^5 = 32$$

$$\therefore x = 26$$

<답> 26

23. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = -\sin x + 8e^{2x} \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = 8$$

<답> 8

24. 출제의도 : 무리방정식의 모든 실근의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt{x^2 - 6x - 1} = t \quad (t \geq 0) \text{라 하면}$$

$$(t^2 + 1) - t = 3 \quad t^2 - t - 2 = 0$$



$$(t-2)(t+1)=0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because t \geq 0)$$

$$\sqrt{x^2-6x-1}=2 \quad x^2-6x-1=4$$

$$x^2-6x-5=0$$

따라서, 모든 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -5이므로

$$k=-5$$

$$\therefore k^2=25$$

<답> 25

25. 출제의도 : 실생활 문제를 로그를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 원본 A, B를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비는 각각  $P_A$ ,  $P_B$ 이고 평균 제곱오차는 각각  $E_A$ ,  $E_B$ 이므로

주어진 식에 대입하면

$$P_A = 20 \log 255 - 10 \log E_A$$

$$P_B = 20 \log 255 - 10 \log E_B$$

이때, 두 식을 변끼리 빼면

$$P_A - P_B = -10 \log E_A + 10 \log E_B$$

$$P_A - P_B = 10 \log \frac{E_B}{E_A}$$

이때,  $E_B = 100E_A$ 이므로

$$P_A - P_B = 10 \log \frac{100E_A}{E_A}$$

$$= 10 \log 100$$

$$= 20$$

<답> 20

26. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하는 경우의 수는 1부터 19까지의 10개의 홀수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$$\therefore {}_{10}H_3 = {}_{10+3-1}C_3$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

<답> 220

27. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{FP} = a$ ,  $\overline{F'P} = b$ 라 하자.

타원의 장축의 길이가 6이므로 타원의 정의에 의해

$$a+b=6 \quad \text{㉠}$$

주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는

$$2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$$

이므로 직각삼각형 FPF'에서

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20 \quad \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a=2, \quad b=4 \quad (\because b > a)$$

$\angle F'FP = \theta$ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이므로 삼각형 QF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times \overline{QF} \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 6 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 12$$

<답> 12

28. 출제의도 : 정적분으로 나타내어진 함수의 최댓값을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정적분과 미분의 관계에서

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (a-t)e^t dt = (a-x)e^x$$

이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = a$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (a-t)e^t dt \\ &= [(a-t)e^t]_0^x - \int_0^x (-e^t) dt \\ &= [(a-t)e^t]_0^x + [e^t]_0^x \\ &= (a-x)e^x - a + e^x - 1 \\ &= (a+1-x)e^x - a - 1 \end{aligned}$$

이므로 최댓값은

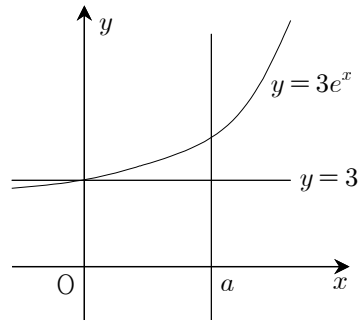
$$f(a) = e^a - a - 1 = 32$$

$$\therefore e^a - a = 33 \dots \text{㉠}$$

곡선  $y=3e^x$ 과 직선  $y=3$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면

$$3e^t = 3 \text{에서}$$

$$t = 0$$



따라서 곡선  $y=3e^x$ 과 두 직선  $x=a$ ,  $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^a (3e^x - 3) dx &= [3e^x - 3x]_0^a \\ &= (3e^a - 3a) - (3 - 0) \\ &= 3(e^a - a) - 3 \\ &= 3 \times 33 - 3 (\because \text{㉠}) \\ &= 96 \end{aligned}$$

<답> 96

29. 출제의도 : 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원  $C$ 를 포함하는 평면을  $\alpha$ 라 하고  $xy$  평면과 평면  $\alpha$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$

$(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 라 하면 (나)에서 원  $C$ 의

넓이는 1이므로 정사영의 넓이는

$$\pi \times \cos \theta$$

이다.

따라서 정사영의 넓이가 최대가 되려면  $\theta$ 가 최소가 되어야 한다.

원  $C$ 의 중심을  $C$ 라 하고 직선  $CP$ 가  $xy$ 평면과 만나는 점을  $Q$ 라 하자.



$$= \begin{cases} -(2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x < -1) \\ (2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x > -1) \end{cases}$$

따라서  $q(x^{2m-1}) = |f(x^{2m-1})|$ 이라 하면  
함수  $q(x^{2m-1})$ 는  $x = -1$ 에서 미분가능  
하지 않고,

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} q'(x^{2m-1}) = -(2m-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} q'(x^{2m-1}) = 2m-1$$

이다.

또,  $k = 2m$  ( $m$ 은 자연수)일 때,

$$f(x^k) = e^{x^{2m}+1} - 1 \text{이므로 모든 실수 } x \text{에}$$

$$\text{대하여 } f(x^k) > 0 \text{이다.}$$

따라서

$$|f(x^k)| = e^{x^{2m}+1} - 1$$

이므로

$$\frac{d}{dx}|f(x^k)| = 2mx^{2m-1}e^{x^{2m}+1}$$

따라서  $r(x^{2m}) = |f(x^{2m})|$ 이라 하면 함수  
 $r(x^{2m})$ 은 실수 전체 집합에서 미분가능  
하다.

이제  $n = 2m-1$  또는  $n = 2m$ 일 때

$$\text{함수 } 100|f(x)| - \sum_{k=1}^m |f(x^{2k-1})| \text{를 } s(x) \text{라}$$

하자. 즉,

$$s(x) = p(x) - \sum_{k=1}^m q(x^{2k-1})$$

이때 함수  $s(x)$ 가  $x = -1$ 에서 미분가능  
하면 함수  $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에  
서 미분가능하다.

$x \neq -1$ 일 때

$$s'(x) = p'(x) - \sum_{k=1}^m q'(x^{2k-1})$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} s'(x) = -100 + \sum_{k=1}^m (2k-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} s'(x) = 100 - \sum_{k=1}^m (2k-1)$$

이때 함수  $s(x)$ 가  $x = -1$ 에서 미분가능  
하려면

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} s'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} s'(x)$$

즉,

$$-100 + \sum_{k=1}^m (2k-1) = 100 - \sum_{k=1}^m (2k-1)$$

이어야 한다.

$$\sum_{k=1}^m (2k-1) = m^2 = 100 \text{에서}$$

$$m = 10$$

따라서  $n = 2m-1$  또는  $n = 2m$ 이므로

$$n = 19 \text{ 또는 } n = 20$$

이다.

따라서 구하는 모든 자연수  $n$ 의 값의  
합은

$$19 + 20 = 39$$

<답> 39