

# 2014학년도 7월 고3 전국연합학력평가

## 정답 및 해설(수학 영역)

### 수학 영역

#### B형 정답

1	①	2	②	3	②	4	③	5	⑤
6	③	7	④	8	①	9	②	10	②
11	⑤	12	③	13	①	14	④	15	⑤
16	①	17	⑤	18	④	19	③	20	④
21	③	22	39	23	11	24	4	25	32
26	10	27	13	28	5	29	102	30	13

#### B형 해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$$\sqrt[4]{81} \times \sqrt{\sqrt{16}} = 3 \times 2 = 6$$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$$A^2 + AB = A(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 30

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2} \text{ 에서}$$

분모, 분자에  $(\sqrt{x+2} + 2)$ 를 곱하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = 16$$

4. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A) = \frac{1}{2}$$

따라서  $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

5. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$$(1 + \tan\theta)\tan 2\theta$$

$$= (1 + \tan\theta) \times \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan\theta} = 3$$

따라서  $\tan\theta = \frac{3}{5}$

6. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

수열  $\{a_n\}$ 이 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + 3}{2 - a_n} = 2 \text{ 에서 } \frac{4\alpha + 3}{2 - \alpha} = 2$$

$$4\alpha + 3 = 4 - 2\alpha, \alpha = \frac{1}{6}$$

따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \frac{1}{6}$

7. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

(사각형 AQCP의 넓이)

= (삼각형 ACP의 넓이) + (삼각형 AQC의 넓이)

직선 AC의 기울기가 2이므로 사각형 AQCP의 넓이가 최대가 되려면 접선의 기울기가 2가 되는 접점을 P와 Q로 하면 된다.

$$y' = 3x^2 - 10x + 4 \text{ 에서 } 3x^2 - 10x + 4 = 2,$$

$$3x^2 - 10x + 2 = 0 \text{ 의 두 근이 점 P, Q의}$$

x좌표이므로 두 점 P, Q의 x좌표의 곱은  $\frac{2}{3}$

8. [출제의도] 분수부등식을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$$\text{부등식 } \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} \leq 0 \text{ (} f(x)-g(x) \neq 0 \text{)의}$$

양변에  $\{f(x)-g(x)\}^2$ 을 곱하면

$$f(x)\{f(x)-g(x)\} \leq 0$$

(i)  $f(x) \leq 0, f(x) > g(x)$ 인 정수해는 존재하지 않는다.

(ii)  $f(x) \geq 0, f(x) < g(x)$ 인 정수해는

$$x = 0, 1, 5, 6$$

(i)과 (ii)에 의하여 정수 x의 개수는 4

9. [출제의도] 부분적분법을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$$\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x) = x \cos x \text{ 에서}$$

$$\int \{xf(x)\}' dx = \int x \cos x dx$$

$$xf(x) = x \sin x + \cos x + C \text{ (단, C는 적분상수)}$$

(가)에서  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} + C$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + C \text{ 이므로 } C = 0$$

$$\pi f(\pi) = \pi \sin \pi + \cos \pi \text{ 에서}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{\pi}$$

10. [출제의도] 중복조합 이해하기

$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ 이고  $x+y+z=6$ 이므로

$x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$ 로 치환하면

$X+Y+Z=3$ 인 음이 아닌 정수해

$(X, Y, Z)$ 의 개수와 일치하므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

11. [출제의도] 역행렬의 성질 추론하기

$\neg. A * O = A^2 = O$ 이면  $A = O$  (거짓)

$$\text{반례) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neg. A * B = A * (-B)$ 이므로  $AB = BA$ 이다.

$$(AB)^2 = A^2 B^2 \text{ (참)}$$

$\neg. A * E = A$ 이므로  $A^2 - A - E = O$

$$A^2 - A - E = (A+E)(A-2E) + E = O$$

$$(A+E)(2E-A) = E \text{ 이므로}$$

$$(A+E)^{-1} = 2E - A \text{ (참)}$$

따라서  $\neg, \neg$

12. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 이므로  $f(g(x)) = x$

$$g(2) = \theta \text{ 라 하면 } f(\theta) = 2$$

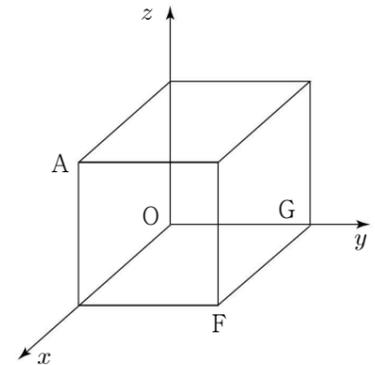
$$f(\theta) = 2 \sin \theta + 1 = 2 \text{ 에서 } \theta = \frac{\pi}{6}, g(2) = \frac{\pi}{6}$$

따라서

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

13. [출제의도] 좌표공간의 선분의 내분점 이해하기

점 H를 좌표공간의 원점으로 하면



점 A(3, 0, 3), 점 G(0, 3, 0)에서

내분점 I의 좌표는 (2, 1, 2)

점 F(3, 3, 0)이므로  $\overline{FI} = 3$

14. [출제의도] 조건부확률 이해하기

두 점 사이의 거리가 무리수일 사건을 A라 하고

두 점 사이의 거리가  $3\sqrt{3}$ 일 사건을 B라 하자.

정육면체의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 택하는

$$\text{모든 경우의 수는 } {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

두 점 사이의 거리가 무리수인 경우의 수는 16

두 점 사이의 거리가  $3\sqrt{3}$ 인 경우의 수는 4

$$P(A) = \frac{4}{7} \text{ 이고 } P(A \cap B) = \frac{1}{7} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

주어진 식에 의하여

$$(n+1)a_{n+1} = 2na_n + n \cdot 2^{n+1}$$

이다.  $b_n = \frac{n}{2^n} a_n$  이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{n} \quad (n \geq 1)$$

이고  $b_1 = \boxed{6}$  이므로

$$b_n = \frac{n^2 - n + 12}{2} \quad (n \geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \frac{2^n}{n} \times \frac{n^2 - n + 12}{2} \quad (n \geq 1)$$

이다.

$$f(n) = n, \quad p = 6,$$

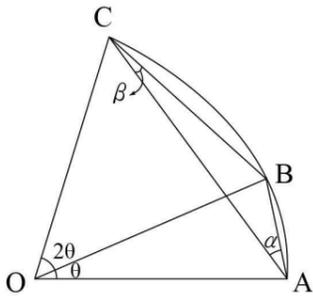
$$g(n) = b_n = 6 + \sum_{k=1}^{n-1} k \quad (n \geq 2)$$

$$g(n) = 6 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 12}{2}$$

$$\text{따라서 } f(p) + g(p) = f(6) + g(6) = 6 + 21 = 27$$

16. [출제의도] 삼각함수의 반각공식을 이용하여 수학내적 문제해결하기

O를 중심으로 하고 반지름이  $\overline{OA}$  인 원을 그리면



원주각과 중심각의 관계에 의하여

$$\angle BOC = 2\theta \text{ 이므로 } \alpha = \theta$$

$$\angle AOB = \theta \text{ 이므로 } \beta = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{따라서 } \sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1}{20}$$

17. [출제의도] 일차변환의 합성 이해하기

O를 원점이라 하고  $\angle AOB = \theta$  라 하면

$$\overline{OB} = 2\sqrt{5}, \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{압축변환 } f \text{ 를 나타내는 행렬 } M = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

회전변환  $g$  를 나타내는 행렬

$$N = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

따라서 합성변환  $h = f \circ g$  를 나타내는 행렬

$$MN = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

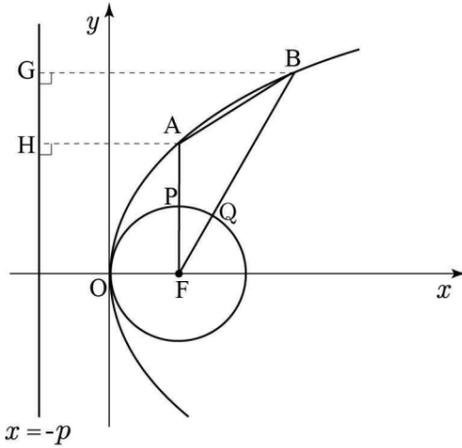
점  $B(-2, 4)$  는 일차변환  $h$  에 의하여 점

$P(a, b)$  로 옮겨지므로

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = MN \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

따라서  $ab = 48$

18. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



원의 반지름의 길이가  $\overline{FP} = p$  이므로  $\overline{AP} = p$

$\overline{AF} = \overline{AH}$  이므로 점 A의 x좌표는  $p$

$$\overline{FQ} = p \text{ 이므로 } \overline{BQ} = \frac{5}{2}p$$

$$\overline{BF} = \overline{BG} \text{ 이므로 점 B의 x좌표는 } \frac{5}{2}p$$

$$\text{삼각형 AFB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2p \times \left(\frac{5}{2}p - p\right) = 24$$

따라서  $p = 4$

19. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$C_1$ 은 중심이  $O_1(2-1, 0)$ , 반지름의 길이가 1인 원

$C_2$ 은 중심이  $O_2(2-\frac{1}{2}, 0)$ , 반지름의 길이가  $\frac{1}{2}$ 인 원

$C_3$ 은 중심이  $O_3(2-(\frac{1}{2})^2, 0)$ , 반지름의 길이가

$(\frac{1}{2})^2$ 인 원

$C_n$ 은 중심이  $O_n(2-(\frac{1}{2})^{n-1}, 0)$ ,

반지름의 길이가  $(\frac{1}{2})^{n-1}$ 인 원

$B(-1, 0)$ 을 지나고, 기울기가  $a_n$ 인 직선의 방정식을  $y = a_n(x+1)$ 이라 하자.

점  $O_n$ 부터 직선  $a_n x - y + a_n = 0$ 까지의 거리는

원  $C_n$ 의 반지름의 길이  $(\frac{1}{2})^{n-1}$ 과 같다.

$$\frac{\left| a_n \left( 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \right|}{\sqrt{a_n^2 + 1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sqrt{a_n^2 + 1} = 2^{n-1} a_n \left( 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

$$a_n^2 + 1 = 4^{n-1} a_n^2 \left( 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)^2$$

$$= a_n^2 (9 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 1)$$

$$a_n^2 = \frac{1}{9 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^n}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^n}}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\sqrt{9 \cdot 4^{n-1} - 3 \cdot 2^n}} = \frac{2}{3}$$

20. [출제의도] 타원의 접선의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

초점  $F(1, 0), F'(-1, 0)$

$P(x_1, y_1)$ 에서 접선의 방정식은

$$3x_1 x + 4y_1 y = 12$$

접선의  $x$ 절편은  $\frac{4}{x_1}$

$P(x_1, y_1)$ 에서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{4y_1}{3x_1}(x - x_1)$$

접선에 수직인 직선의 방정식의  $x$ 절편은  $\frac{x_1}{4}$

세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$$\overline{RF} = 1 - \frac{x_1}{4}, \quad \overline{F'R} = \frac{x_1}{4} + 1, \quad \overline{FQ} = \frac{4}{x_1} - 1$$

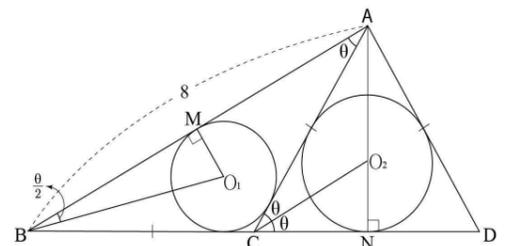
$$2\left(\frac{x_1}{4} + 1\right) = \left(1 - \frac{x_1}{4}\right) + \left(\frac{4}{x_1} - 1\right)$$

양변에  $4x_1$ 을 곱하여 정리하면

$$3x_1^2 + 8x_1 - 16 = (3x_1 - 4)(x_1 + 4) = 0$$

$$\text{따라서 } x_1 = \frac{4}{3}$$

21. [출제의도] 도형과 함수의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를  $r_1$ ,

삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를  $r_2$ 라 하자.

$$\text{삼각형 } BO_1M \text{에서 } r_1 = 4 \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\text{삼각형 } BCM \text{에서 } \overline{BC} = \frac{4}{\cos \theta} = \overline{AC}$$

$$\text{삼각형 } ACN \text{에서 } \overline{CN} = \frac{4}{\cos \theta} \times \cos 2\theta$$

삼각형  $CNO_2$ 에서

$$r_2 = \overline{CN} \tan \theta = \frac{4 \tan \theta \cos 2\theta}{\cos \theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r_1 r_2}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{16 \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta \cos 2\theta}{\theta^2 \cos \theta} = 8$$

22. [출제의도] 등차수열 이해하기

수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_6 + a_7 = (a_3 + 3d) + (a_3 + 4d)$$

$$= 2a_3 + 7d = 10 + 7d = 24 \text{에서 } d = 2$$

$$\text{따라서 } a_{20} = a_3 + 17d = 39$$

23. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

일차변환을 나타내는 행렬을  $A$ 라 하면

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 11

24. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$$t = \sqrt{x^2 + 8x + 8} \text{이라 하면 } t^2 + t - 6 = 0$$

$$t = 2 \ (t \geq 0)$$

$$\text{그러므로 } \sqrt{x^2 + 8x + 8} = 2$$

$$\text{따라서 } x^2 + 8x + 4 = 0 \text{이므로}$$

모든 실근의 곱은 4

25. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학적 귀납법 문제해결하기

주어진 조건에 의하여

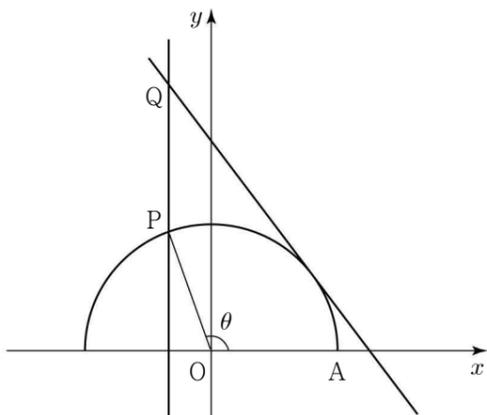
$$E_1 = 300R \log_a 16, \ E_2 = 240R \log_a x \text{이고,}$$

$$E_1 = E_2 \text{이므로 } 300R \log_a 16 = 240R \log_a x$$

$$\frac{5}{4} \log_a 16 = \log_a 32 = \log_a x$$

따라서  $x = 32$

26. [출제의도] 속도와 가속도를 이용하여 수학적 귀납법 문제해결하기



$\angle AOP = \theta$ 라 하면 호의 길이  $l = 10\theta$

점 P  $(10\cos\theta, 10\sin\theta)$ 가 매초 5의 일정한 속력으로 이동하므로 양변을 시각  $t$ 에 대해 미분하면

$$\frac{dl}{dt} = 10 \frac{d\theta}{dt} = 5, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{PQ} = L = 20 - 10\sqrt{3} \cos\theta - 10\sin\theta$$

따라서  $L$ 을 시각  $t$ 에 대해 미분하면

$$\frac{dL}{dt} = (10\sqrt{3} \sin\theta - 10\cos\theta) \frac{d\theta}{dt} \\ = 10\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

따라서  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 일 때, 최댓값은 10

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 수학적 귀납법 문제해결하기

평면 인형을 크기가 작은 것부터  $a_1, a_2, a_3$ 이라

하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터  $b_1, b_2, b_3,$

$b_4$ 라 하자.

(i)  $a_3$ 이  $b_2$ 보다 왼쪽에 있는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

(ii)  $a_3$ 이  $b_2$ 보다 오른쪽에 있는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 13

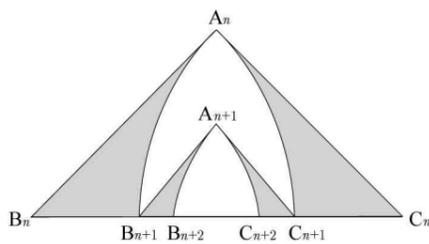
28. [출제의도] 도형과 무한등비급수 추론하기

$$S_1 = 2\{(\text{삼각형 } A_1B_1C_1 \text{의 넓이}) \\ - (\text{부채꼴 } B_1A_1C_2 \text{의 넓이})\}$$

$$= 2\left(4 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2(4 - \pi)$$

$$S_2 = 2\{(\text{삼각형 } A_2B_2C_2 \text{의 넓이}) \\ - (\text{부채꼴 } B_2A_2C_3 \text{의 넓이})\}$$

$$= 2(4 - \pi)(\sqrt{2} - 1)^2$$



$$\overline{B_n C_n} = 2l_n, \quad \overline{B_{n+1} C_{n+1}} = 2l_{n+1} \text{이라 하면}$$

$$\overline{A_n B_n} = \overline{B_n C_{n+1}} = \sqrt{2}l_n \text{이고}$$

$$\frac{1}{2} \overline{B_n C_n} + \frac{1}{2} \overline{B_{n+1} C_{n+1}} = \overline{B_n C_{n+1}} \text{이므로}$$

$$l_n + l_{n+1} = \sqrt{2}l_n$$

$$l_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)l_n$$

$$S_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)^2 S_n$$

$$\frac{1}{4 - \pi} \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{4 - \pi} \cdot \frac{2(4 - \pi)}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$a = 1, \quad b = 2$$

따라서  $a^2 + b^2 = 5$

29. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학적 귀납법 문제해결하기

문제해결하기

$$\int_{-3}^3 x^2 f(x) dx$$

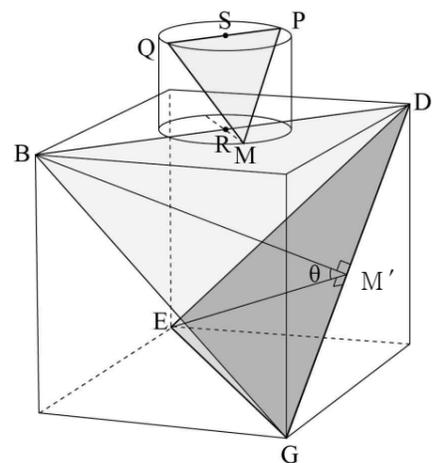
$$= \int_{-3}^{-1} x^2 f(x) dx + \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx + \int_1^3 x^2 f(x) dx$$

$$= 2 \int_1^3 x^2 f(x) dx + 2$$

$$= 2 \int_{-1}^1 (x+2)^2 f(x+2) dx + 2$$

$$= 2 \int_{-1}^1 (x+2)^2 f(x) dx + 2 = 102$$

30. [출제의도] 정사영을 이용하여 수학적 귀납법 문제해결하기



원기둥의 밑면  $\alpha, \beta$ 의 중심을 각각 R, S라 하자.

$\overline{PQ} \parallel \overline{DB}$ 이고,  $\overline{SM} \parallel \overline{RG}$ 이므로 평면 MPQ와 평면 GDB는 평행하다.

삼각형 GDB와 삼각형 DEG는 모두 정삼각형이고 두 삼각형이 만나서 생기는 선분은  $\overline{DG}$ 이다.

선분 DG의 중점을  $M'$ 이라 하고

$\theta = \angle BM'E$ 라 하면

$$\overline{BM'} = \overline{EM'} = 2\sqrt{6}, \quad \overline{BE} = 4\sqrt{2} \text{이므로}$$

삼각형  $BM'E$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \cos(\angle BM'E) = \frac{24 + 24 - 32}{2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$$

삼각형 MPQ의 넓이  $S$ 는

$$S = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는

$$S \cos \theta = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 3, \quad b = 2$$

고 3

## 정답 및 해설

2014학년도 7월  
전국연합학력평가

따라서  $a^2 + b^2 = 13$