

- ① 1% ② 1.5%
- ③ 2% ④ 2.5%
- ⑤ 3%

2014년 6월 28일 시행
서울시 수학 기출문제해설

1. [정답] ③

$z = a + bi$ 라 할 때 $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ 이므로 z^2 이 음의 실수가 되기 위해서는 $ab = 0$, $a^2 - b^2 < 0$ 을 만족해야 하므로 $a = 0$ 이다.

$z = 2x - 2 - xi$ 이므로 $x = 1$

$\therefore z = -i$

$z + z^2 + z^3 + z^4$
 $= -i - a + i + 1 = 0$

2. [정답] ④

$A + A^{-1} = E$ 의 양변에 A 를 곱하고 정리하면 $A^2 - A + E = 0$

양변에 $A + E$ 를 곱하면

$A^3 + E = 0$

$A^3 = -E$

$\therefore A^3$ 의 역행렬 $= -E$

3. [정답] ②

근과 계수의 관계에 의해서

이차방정식의 두근을 α, β 라 할 때,

$\alpha + \beta = -3$, $\alpha\beta = 1$ ($\alpha < 0$, $\beta < 0$)

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$

$= -3 + (-2) = -5$

4. [정답] ⑤

$f(0) = 25$, $f(3) = 18$

$f(4-x) + f(x-1)$ 을 $x-4$ 로 나눈 나머지는 $f(0) + f(3) = 43$ 이므로

5. [정답] ④

$ab = 12$, $bc = 9$, $ca = 3$

위의 두 식을 나누면 $\frac{a}{c} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

연립하여 식을 풀면, $a + b + c = \frac{19}{2}$

6. [정답] ④

문제의 조건에 따라 삼각형의 넓이를 구하면, $y = k$ 에 의해 삼각형의 넓이가 이등분된 도형의 넓이가 3이 되도록 한다.

$y = 4x - 8$ 과 $y = k$ 와의 교점을 D 라 하면, $D\left(\frac{k+8}{4}, k\right)$

밑변의 길이 : $4 - \frac{k+8}{4} = \frac{8-k}{4}$

높이 : $8 - k$

위쪽 삼각형의 넓이

$$\frac{1}{2} \times (8 - k) \times \frac{(8 - k)}{4} = 3$$

$$k = 8 - 2\sqrt{6}$$

7. [정답] ①

$(2, 1), (-2, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$

$$3x + 4y - 10 = 0$$

원의 중심의 좌표 : $(-2, -1)$

원 위의 한 점에서 직선까지의 거리의 최솟값은 3

8. [정답] ②

미분 가능하므로

① 연속

② 좌미분계수=우미분계수

①에 의하여 $a + b = c$

②에 의하여 $2a = 3c$

$a + b + c = 2$ 와의 두 식을 연립하면

$$c = 1, a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$abc = -\frac{3}{4}$$

9. [정답] ②

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x) = f^2(f(x)) = -\frac{1}{\frac{x-1}{x} - 1} = x$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

$f(x)$ 를 세 번 합성하면 항등함수가 되므로 $f^{2014}(x) = f^{3 \times 671 + 1}(x) = f(x)$ $\frac{2013}{2014}$

10. [정답] ④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{n}k\right)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{2}{n}k\right)^3 \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} \int_2^4 x^3 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_2^4 = 90 \end{aligned}$$

11. [정답] ⑤

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{의 해는}$$

$$y = \sin 2x \text{와 } y = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{의 교점의 } x \text{ 좌표와 같다.}$$

대칭성을 이용해 모든근의 합을 구하면,

$$3\pi$$

12. [정답] ①

두 수의 곱이 3의 배수가 되기 위해서는 적어도 하나가 3의 배수이어야 한다. 1부터 10까지의 자연수 중 3의 배수는 3개 이므로

두 수의 곱이 3의 배수가 되는 경우

= 전체의 경우 - 3의 배수가 아닌 두 수를 곱하는 경우

$$= {}_{10}C_2 - {}_7C_2 = 24$$

13. [정답] ②

해로부터 부등식을 거꾸로 찾아본다.

$$-2 \leq x \leq 1$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^1$$

$$(2^x - 2^{-2})(2^x - 2^1) \leq 0$$

$$4^x - (2^{-2} + 2^1)2^x + 2^{-1} \leq 0$$

$$a = -9, b = 2 \text{ 이므로}$$

$$ab = -18$$

14. [정답] ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{n^2 + an + b} \text{ 이므로 두 번째 식에 대입하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 2n)a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^2 - 10n}{n^2 + an + b} = 15$$

15. [정답] ③

$$a_{n+1} = 2a_n + 3$$

$$(a_{n+1} + 3) = 2(a_n + 3)$$

$a_n + 3$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

$$a_n + 3 = (a_1 + 3) 2^{n-1}$$

$$a_{10} = 6 \times 2^9 - 3 = 3(2^{10} - 1)$$

16. [정답] ①

무한등비수열이 수렴하기 위한 조건에 의해

$$x = -2$$

$$-1 < x - 3 < 1$$

$$2 < x \leq 4$$

만족하는 정수는 -2, 3, 4 로 합은 5이다.

17. [정답] ③

$x = -t$ 라 치환하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4t}{\sqrt{t^2 + 2} + 5} = -4$$

18. [정답] ⑤

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \text{ 이므로}$$

주어진 식을 정리하면

$$\int_{-1}^1 (x^5 + x^3 + x + 1)dx \text{ 이다.}$$

$$f(x) \text{가 기함수일 때 } \int_{-a}^a f(x)dx = 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_{-1}^1 (x^5 + x^3 + x + 1)dx = \int_{-1}^1 1dx = 2$$

19. [정답] ⑤

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ 의 양변을 제곱하여 정리,}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} & \sin^3\theta + \cos^3\theta \\ &= (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

를 이용하여 대입하여 푼다.

20. [정답] ①

확률이 $\frac{1}{5}$ 인 독립시행을 100번 시행

$B(100, \frac{1}{5})$ 인 이항분포

$E(X) = 20, V(X) = 16$ 으로 정규화하면,

$P(X \geq 30) = P(Z \geq 2.5)$ 이므로

$$0.5 - 0.49 = 0.01$$