

수 학

[강평 및 해설 : 박성재 교수]

< 총 평 >

어느 문제하나 편안하지 않았던 시험이었습니다. 20분이라는 짧은 시험시간을 고려해 봤을 때 더더욱 많은 학생들이 당황하고 제대로 대응 하기가 쉽지 않았던 어려운 난이도의 시험이었습니다.

시험을 치르다 보면 쉬울 때도 있고 어려울 때도 있지만 항상 수험생은 어려운 시험 난이도에 대한 자기 나름대로의 솔루션을 가지고 있어야 한다. 언제 그런 상황이 나에게 닥칠지 모르기 때문이다. 어려운 난이도라 하더라도 표준점수가 적용되므로 자신을 풀 수 있는 문제를 최대한 많이 풀어낼 수 만 있다면 별 걱정이 없다. 하지만 평상시에 문제를 천천히 풀어가던 수험생들은 어려운 문제들에서 속도가 현저하게 느려지기 때문에 평상시의 실력을 발휘하기가 쉽지 않다.

난이도 있는 문제에 대한 대비는 속도와 많은 상관관계가 있으니 평상시 정확하게 풀아가는 연습 뿐 아니라 속도에 대한 연습도 충분하게 이루어 져야 하겠다.

과정별로 살펴보면 고1과정이 12문제, 미적분 5문제, 확률과 통계가 3문제로 고1과정이 많이 출제되었는데 비교적 미적분이 많이 출제되었고 확률도 난이도가 충분했기 때문에 전반적으로 과정별 분배는 잘 이루어진 것 같습니다. 근래에 고1과정의 지나친 편중과 미적분과 확률의 일정한 균형점이 없는 문제는 많이 개선되었으나 전반적으로 어려운 난이도로 일관해서 과목별 균형이나 분배가 별 의미를 가지지 못한 것이 아쉬운 점으로 생각됩니다.

항상 하는 얘기지만 수험시험은 SCAN/SKIP이 가장 중요한 과목이다. 어려운 몇 문제에 시간을 낭비하면 전반적으로 쉬운 난이도의 수험시험을 망치는 좋은 길이 된다. 확실하게 SCAN하고 과감하게 SKIP하는 것이 가장 중요한 시험스킬임을 항상 명심하길 바랍니다.

여러분 모두에게 좋은 결과가 있기를....

01. 해답 : ①

연립방정식을 정리하면

$$\begin{cases} x(x+y)=7 \\ 2(x+y)=7 \end{cases}$$

$$x=2 \text{ 이므로 대입정리 하면 } y=\frac{3}{2}$$

$$x-y=\frac{1}{2}$$

02. 해답 : ②

$$f(6)=-5$$

$$f^{-1}(6)=k, f(k)=6$$

$$x < -1 \text{ 구간에서의 치역이 } y > 2 \text{ 이므로}$$

$$k^2+2k+3=6$$

$$k=-3 \text{ or } 1$$

$$k=-3 (\because x < -1)$$

$$f^{-1}(6)+f(6)=-3-5=-8$$

03. 해답 : ②

$$a+b=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$$E(X)=-a+b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

$$\textcircled{a}, \textcircled{b} \text{ 를 연립 정리하면 } a=b=\frac{1}{4}$$

$$V(X)=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}-1=2$$

04. 해답 : ②

$$\sum_{k=1}^{2019} (k+1)a_k = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \dots + 2020a_{2019} = 47$$

$$\sum_{k=1}^{2019} ka_{k+1} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + 2019a_{2020} = 26$$

윗식에서 아래식을 빼면

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2019}) - 2019a_{2020} = 21$$

$$a_{2020} = \frac{1}{2019} \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^{2019} a_k = 11$$

05. 해답 : ④

$$0 \leq a \leq b < c < 12 \text{ 의 순서쌍은}$$

$$0 \leq a \leq b < c \leq 11 \text{ 으로 바뀌서 풀어도 된다.}$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq 11 \text{ 의 순서쌍의 개수에서}$$

$$0 \leq a \leq b = c \leq 11 \text{ 의 순서쌍의 개수를 빼면 된다.}$$

$$\text{결국, } {}_{12}H_3 - {}_{12}H_2 = 286$$

06. 해답 : ②

$$p : -3 \leq x \leq 4$$

$$q : a-2 \leq x \leq a+2$$

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $P \supset Q$

따라서 $-3 \leq a-2, a+2 \leq 4$

결국, $-1 \leq a \leq 2$

07. 해답 : ①

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2-2h)}{2h} = \frac{5}{2} f'(2) = 15$$

08. 해답 : ④

$$f(f(5)) = f(2) = 5 \text{ 이므로}$$

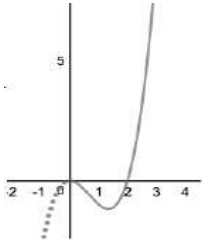
$f(x)$ 는 $(5, 2), (2, 5)$ 를 지나는 직선이다.

$$f(x) = -x + 7$$

그러므로 $a = -6$

09. 해답 : ③

$$F(0) = 0, F'(x) = f(x) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$$



$$F(0) = 0, F(2) = -\frac{4}{3}, F(3) = \frac{9}{4}$$

$$\text{최솟값은 } m = -\frac{4}{3}, \text{ 최댓값은 } M = \frac{9}{4}$$

$$Mm = -3$$

10. 해답 : ②

ㄱ. 속도가 t 이므로 시간에 따라 속도가 증가한다.

ㄴ. $v(2) \neq 0$ 이므로 운동방향이 바뀌지 않는다.

ㄷ. $a(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq 2) \\ 2t-6 & (t > 2) \end{cases}$ 에서 $a(3) = 0$ 이다.

11. 해답 : ④

$$\log_{\sqrt{b}} a^2 = 4 \log_b a = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = 36$$

12. 해답 : ②

$$-x^2 + 2x + 3 = x + 2$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{의 해를 } \alpha, \beta \text{라 하면 } |\alpha - \beta| = \sqrt{5}$$

$$|AB| = \sqrt{2} \times |\alpha - \beta| = \sqrt{10}$$

13. 해답 : ③

축의 방정식은 $x = a$ 이다.

(1) $a < 0$

$f(0)$ 이 최솟값이다.

$$f(0) = 2a = -12$$

$$a = -6$$

(2) $0 \leq a < 2$

$f(a)$ 가 최솟값이다.

$$f(a) = 2a^2 - 4a^2 + 2a = -12$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$a = -2 \text{ or } 3 \text{ (범위에 존재하지 않음)}$$

(3) $a \geq 2$

$f(2)$ 가 최솟값이다.

$$f(2) = 8 - 6a = -12$$

$$a = \frac{10}{3}$$

모든 a 값의 합은 $-\frac{8}{3}$

14. 해답 : ①

두 점의 2:1내분점을 구하면 $(\frac{2a-1}{3}, -2)$

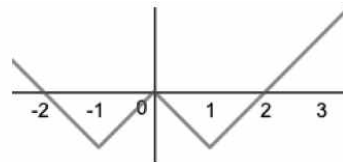
이점이 원의 내부에 있으므로

$$\left(\frac{2a-1}{3}\right)^2 + 4 \leq 13$$

$-4 \leq a \leq 5$ 이므로 정수 a 의 개수는 10개.

15. 해답 : ④

$$y = f(f(x)) = g(x)$$



$\int_0^t g(x) dx = 0$ 을 만족하려면 위 그래프를 참조해 구해보면

$$t = 2 + \sqrt{2} \text{ 이어야 한다.}$$

16. 해답 : ③

$A \cap B^c$ 의 모든원소의 합은 50이하의 자연수 중

3의 배수의 합에서 12의 배수의 합을 뺀 값과 같다.

$$\frac{16(3+48)}{2} - \frac{4(12+48)}{2} = 288$$

17. 해답 : ①

$$a_7^2 - a_1^2 = (a_7 + a_1)(a_7 - a_1) = 36$$

$$d = 3$$

$$a_7 - a_1 = 6d = 18$$

$$a_7 + a_1 = 2$$

$$\sum_{k=1}^7 a_k = 7$$

18. 해답 : ①

900명중 600명이 입장하였으므로 $\hat{p} = \frac{2}{3}$ 이다.

모비율 추정공식을 이용하면

$$\frac{2}{3} - 2.5\sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{900}} \leq p \leq \frac{2}{3} + 2.5\sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{900}}$$

$$a = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{36}, b = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{36}$$

$$b^2 - a^2 = \frac{2\sqrt{2}}{27}$$

19. 해답 : ②

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) = \int_0^1 2x(1+2x)^2 dx$$

$$2 \int_0^1 (4x^3 + 4x^2 + x) dx = \frac{17}{3}$$

20. 해답 : ④

$$a_n = 4, 6, 4, 6, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{2^{2n-1}} + \frac{6}{3^{2n}} \right) = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{41}{12}$$

$$p + q = 53$$