수 학

문 1. 복소수 $z=1+i$일 때, z^{10}의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다)

① $16i$
② $16+16i$
③ $32i$
④ $32+32i$

문 2. 실수 전체의 집합에서 정의된 세 함수 f, g, h에 대하여

$$f(x)=x^2+1, \quad (h\circ g)(x)=3x-1$$

일 때, $(h\circ(g\circ f))(-1)$의 값은?

① 5
② 6
③ 7
④ 8

문 3. 부등식 $2^{-x}<64<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 1
② 2
③ 3
④ 4

문 4. 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & b\\ c & -2\end{pmatrix}$에 대하여 $A-E$의 역행렬이 $A+E$일 때, 상수 b, c의 곱 bc의 값은? (단, E는 단위행렬이다)

① -1
② -2
③ -3
④ -4

문 5. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=ax(x-2) \text{ (단, } 0\le x\le 2)$$

일 때, 상수 a의 값은?

① 1
② $\frac{3}{4}$
③ $-\frac{3}{4}$
④ -1

문 6. 연립부등식 $\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ x^2-3y^2\le 0\end{cases}$을 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 좌표평면 위에 나타내는 영역의 넓이는?

① $\frac{2}{3}\pi$
② $\frac{4}{3}\pi$
③ 2π
④ $\frac{8}{3}\pi$

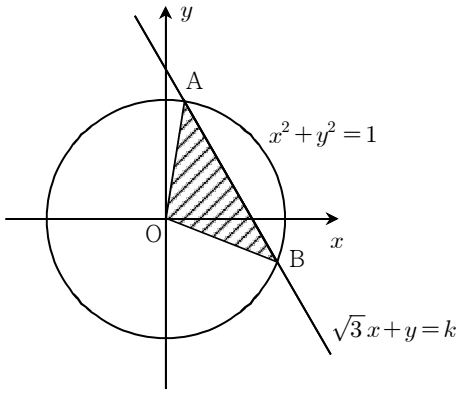
문 7. 다항식 $f(x)$를 $x-3$, $x-4$로 나눈 나머지가 각각 3, 2이다. $f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(1)$의 값은?

① 2
② 4
③ 6
④ 8

문 8. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록이고 두 점 (1, 0), (3, 0)을 지난다. 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 극댓값이 4일 때, $f(x)$의 최솟값은?

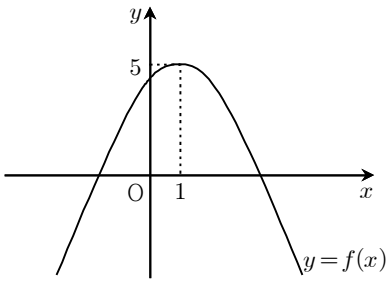
① -1
② -2
③ -3
④ -4

문 9. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $\sqrt{3}x+y=k$가 두 점 A, B에서 만날 때, 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 되도록 하는 상수 k^2의 값은? (단, O는 원점이다)



① 1
② $\frac{4}{3}$
③ $\frac{5}{3}$
④ 2

문 10. 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$가 $x=1$에서 최댓값 5를 가질 때, 방정식 $\{f(x)\}^2=5f(x)+1$의 서로 다른 모든 실근의 합은?



① 2
② 4
③ 6
④ 8

문 11. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 4, 7\}$에 대하여 집합 $A-B^C$의 모든 원소의 합은?

① 5
② 6
③ 7
④ 8

문 12. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$의 값은? (단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)

① -4
② -2
③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{4}$

문 13. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 9}\frac{f(x)}{x-9}=2$일 때, $\lim_{x\to 9}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-3}$의 값은?

① 10
② 11
③ 12
④ 13

문 14. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3n$$

을 만족할 때, $a_k=110$이 되는 k의 값은?

① 8
② 9
③ 10
④ 11

문 15. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $f(1)=3$, $f(2)=4$
(나) 모든 $x\in X$에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$

이때, $f(4)+f(5)$의 값은?

① 6
② 7
③ 8
④ 9

문 16. 어느 고등학교에서 안경을 낀 학생은 전체 학생의 40 %이고, 남학생은 전체 학생의 50 %이며, 안경을 낀 남학생은 전체 학생의 25 %라고 한다. 이 학교의 여학생 중에서 임의로 한 명을 뽑았을 때, 그 학생이 안경을 끼고 있을 확률은?

① $\frac{1}{10}$
② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$

문 17. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}$의 값은?

① $\frac{1}{24}$
② $\frac{1}{16}$
③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{5}{48}$

문 18. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=\log_3 3a$, $f(1)=\log_3\frac{a}{3}$일 때, 방정식 $f(x)-x=0$이 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖기 위한 실수 a의 범위는?

① $0<a<1$
② $\frac{1}{9}<a<\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{9}<a<3$
④ $\frac{1}{3}<a<9$

문 19. 최고차항의 계수가 모두 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, 방정식 $f(x)=-g(x)$의 해집합이 $\{3, a\}$이고 방정식 $f(x)g(x)=0$의 해집합이 $\{3, 5, 9\}$일 때, 실수 a의 값은?

① 4
② 5
③ 6
④ 7

문 20. $\log_x y=\log x+2$를 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여, x^2y의 최솟값은?

① 10^{-4}
② 10^{-2}
③ 10^{-1}
④ $10^{-\frac{1}{2}}$

2014년 6월 21일 시행

지방직 수학 기출문제해설

1. [정답] ③

$z=1+i$

$z^2=2i$

$z^{10}=(z^2)^5=2^5\cdot i^5=32i$

2. [정답] ①

$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$ 이다.

$f(-1)=2$

$(h\circ g)(2)=5$

3. [정답] ④

$2^{-x}<2^6<2^{-2x+4}$

$-x<6<-2x+4$

$\therefore\ -6<x<-1$

$\therefore$ 4개

4. [정답] ②

$(A-E)(A+E)=E$

$A^2-2E=0$

$A=\begin{pmatrix}2 & b\\ c & -2\end{pmatrix}$

케일리 해밀턴 정리를 사용하면

$A^2+(-4-bc)E=0$

$-4-bc=-2$이므로

$\therefore\ bc=-2$

5. ③

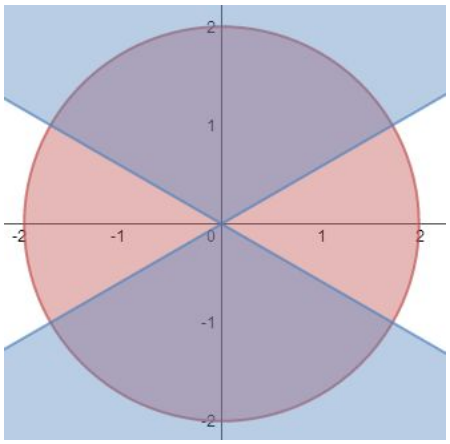
전체 확률의 합은 1이므로 $\int_0^2 f(x)dx = 1$

$$\int_0^2 (ax^2 - 2ax)dx = a\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2 = a \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 1$$

$$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$$

6. ④

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 직선의 방정식은 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$이므로, 직선이 x축과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이므로

겹치는 부분의 각의 크기의 합은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

$$\therefore\ \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

7. ②

$f(3) = 3,\ f(4) = 2$이다.

$f(x+1) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + R(x) \qquad R(x) = ax + b$

$x = 2$를 대입하면 $\quad f(3) = R(2) = 2a + b = 3$

$x = 3$을 대입하면 $\quad f(4) = R(3) = 3a + b = 2$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a = -1,\ b = 5$

$$\therefore\ R(1) = 4$$

8. ③

$g(x)$는
$[0,\ 1]$ 구간에서 증가하고
$[1,\ 3]$ 구간에서 감소하고
$[3,\ \infty]$ 구간에서 증가한다.

따라서 $x=1$에서 극댓값을 갖는다. 즉, $\int_0^1 f(x)dx=4$ $f(x)=a(x-1)(x-3)$이라 하면

$a\int_0^1(x^2-4x+3)dx=4$ $a\left[\frac{1}{3}x^2-2x^2+3x\right]_0^1=a\left(\frac{4}{3}\right)=4$ $\therefore\ a=3$

$f(x)=3(x^2-4x+3)=3(x-2)^2-3$

$\therefore$ 최솟값 = -3

9. ④

O에서 현AB에 수선을 내리고 그 점을 H라 하면
$\overline{OB^2}=\overline{OH^2}+\overline{HB^2}$

$\overline{OH}$는 원의 중심과 직선사이의 거리이다.
이를 h라 하면 $h=\frac{|-k|}{2}$

$\overline{HB}=x$라 하면 $x^2=1-\frac{k^2}{4}$

삼각형의 넓이 = $\frac{1}{2}\cdot h\cdot 2x=hx$

$S=\frac{|-k|}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}=\frac{1}{4}\cdot|-k|\cdot\sqrt{4-k^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4k^2-k^4}$
$k^2=t$라 치환하면
$S=\frac{1}{4}\sqrt{4t-t^2}=\frac{1}{4}\sqrt{-(t-2)^2+4}$
$t=2$에서 최댓값을 갖는다.

10. ①

$f(x)=t$라 하고 식을 정리하면 $t^2-5t-1=0$
근의 공식에 의해 $t=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$

1)

$f(x)$의 최댓값이 5인데, $\frac{5+\sqrt{29}}{2} > 5$ 이므로

$f(x) = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$의 실근은 존재하지 않는다.

2)

$f(x) = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$에서 두 개의 실근을 갖는다.

$y = f(x)$가 $x = 1$에 대칭이므로

두 실근은 $1+\alpha$, $1-\alpha$가 된다.

$\therefore$ 두 실근의 합 = 2

11. [정답] ②

$B^c = \{1, 3, 5, 6\}$ $A - B^c = \{2, 4\}$ $\therefore$모든 원소의 합 =6

12. [정답] ①

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{4}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ $\therefore$ -4

13. [정답] ③

$$\lim_{x\to 9} \frac{f(x)}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x\to 9} \frac{f(x)}{x-9}(\sqrt{x}+3)$$

$= 2 \cdot 6 = 12$

$\therefore$ 12

14. [정답] ②

$a_{n+1} - a_n = 3n$이므로 a_n의 계차수열은 $3n$이다.

a_n의 계차수열을 b_n이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) \\ &= 2 + \{3 + 6 + \cdots + 3(n-1)\} \\ &= 2 + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$2+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}=110 \qquad n(n-1)=72 \qquad \therefore n=9$

15. [정답] ②

(나) 조건에 의해 $f(f(1))=f(3)=1 \qquad f(f(2))=f(4)=2 \qquad f(5)=5$

$\therefore f(4)+f(5)=7$

16. [정답] ③

주어진 정보를 이용하여 표를 완성하면 다음과 같다.

	안경 착용	안경 미착용	계
남학생	25%	25%	50%
여학생	15%	35%	50%
계	40%	60%	100%

$\therefore \frac{15}{50}=\frac{3}{10}$

17. [정답] ①

$a_n=\{0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots\} \qquad \frac{a_n}{5_n}=\left\{0,\ \frac{1}{5^2},\ 0,\ \frac{1}{5^4},\ \cdots\right\}$

첫항과 공비가 모두 $\frac{1}{5^2}$인 등비수열이므로

$\therefore \frac{\frac{1}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{1}{24}$

18. ④

$f(x)-x=0$이 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖기 위해서는 $f(0)-0$과 $f(1)-1$의 부호가 달라야 한다.

$f(0)-0=\log_3 3a=\log_3 a+1$

$f(1)-1=\log_3\frac{a}{3}-1=\log_3 a-2$

$(\log_3 a+1)(\log_3 a-2)<0$

$-1<\log_3 a<2 \qquad \therefore \frac{1}{3}<a<9$

19. [정답] ④

$f(x)g(x)=0$의 해집합이 $\{3,\ 5,\ 9\}$이므로 $f(x)$, $g(x)$는$(x-3)$, $(x-5)$, $(x-9)$로 인수분해 되고 셋 중 하나를 공통인수로 가진다.

$f(x)=-g(x)$의 해집합이 $\{3,\ a\}$이므로 공통인수는 $(x-3)$이다.
$f(x)=(x-3)(x-5)$
$g(x)=(x-3)(x-9)$라 하면

$f(x)=-g(x)$
$(x-3)(x-5)=-(x-3)(x-9)$ 정리하면
$(x-3)(2x-14)=0$
$\therefore\ a=7$

20. [정답] ①

$x^2y=k$라 하면 $y=\dfrac{k}{x^2}$

$\log_x y=\log x+2$에 대입하여 정리하면 $\log_x \dfrac{k}{x^2}=\log x+2$

$\log_x k-2=\log x+2$ $\dfrac{\log k}{\log x}=\log x+4$

$\log k=(\log x)^2+4\log x$ $\log x=t$라 치환하면

$\log k=t^2+4t=(t+2)^2-4$ $\log k$의 최솟값이 -4 이므로

$\therefore$ k의 최솟값 $=10^{-4}$