(2019.2.23. 시행) 서울시 제1회 9급 기출문제 [수학(A책형) 해설]

[임 현 준 선생님]

제일고시학원 본점(충남대앞)중앙로점 www.okpass.com

1. 정답: ①

풀이)

연립방정식 $\begin{cases} 7-xy=x^2 \cdots ① \\ 2x+2y=7 \cdots ② \end{cases}$

$xy=7-x^2 \Rightarrow y=\dfrac{7}{x}-x$를 정리후 ②번식에 대입하면

$\dfrac{14}{x}=7 \quad \therefore x=2, y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore x-y=\dfrac{1}{2}$

별해)

연립방정식 $\begin{cases} 7-xy=x^2 \\ 2x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+y)=7 \\ 2(x+y)=7 \end{cases}$

즉, $x(x+y)=2(x+y)$이므로

$\therefore x=2, y=\dfrac{3}{2}$

$\therefore x-y=\dfrac{1}{2}$

2. 정답: ②

풀이)

$f^{-1}(6)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=6$ 이므로 $\alpha=-3$

(함수 $f(x)$는 감소함수이며, $x<-1$인 구간에서 치역은 $y>2$이고 $x \geq 1$인 구간에서 치역은 $y \leq 2$이다.)

$f(6)=-5$ 이다.

$\therefore \ f^{-1}(6)+f(6)=-8$

3. 정답: ②

풀이)

확률의 합은 1이므로 $a+b+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=1$이다. 즉, $a+b=\dfrac{1}{2}$

$E(X)=-a+b+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

즉, $-a+b=0$
확률의 합과 평균을 이용해서 나온 연립방정식으로 정리하면
$a=b=\frac{1}{4}$ 이다.
$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}-1^2=2$

4. 정답: ②
풀이)
$\sum_{k=1}^{2019} ka_{k+1}=a_2+2a_3+3a_4+\cdots+2019a_{2019}=26 \cdots$ ①
$\sum_{k=1}^{2019}(k+1)a_k=2a_1+3a_2+4a_3+\cdots+2019a_{2018}+2020a_{2019}=47 \cdots$ ②
② − ① : $2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019})-1=21$ $(\therefore 2020a_{2019}=1)$
$\therefore \sum_{k=1}^{2019} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2019}=11$

5. 정답: ④
풀이)
$0 \le a \le b < c < 12$를 만족하는 정수 a,b,c의 순서쌍은 $0 \le a \le b < c \le 11$를 만족하는 정수 a,b,c의 순서쌍과 같다.
$0 \le a \le b < c \le 11$순서쌍의 갯수=
($0 \le a \le b \le c \le 11$의 순서쌍의 개수)−($0 \le a \le b \le 11$의 순서쌍의 개수)
$\therefore {}_{12}H_3-{}_{12}H_2=286$

6. 정답: ②
풀이)
$p: x^2-x-12 \le 0 \Leftrightarrow p:(x-4)(x+3) \le 0$
$q: |x-a| \le 2 \Leftrightarrow q: -2+a \le x \le 2+a$
p는 q이기 위한 필요조건이려면 진리집합관계는 $Q \subset P$이다. 즉 Q의 진리집합이 P의 진리집합에 포함되어야 하므로 $-1 \le a \le 2$이다.

7. 정답: ①
풀이)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-2h)}{2h}=\frac{3}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}=\frac{5}{2}f'(2)=15$$

8. 정답: ④

풀이)

나 조건에 $(f \circ f)(x)=x$ $x=5$대입하면

$f(2)=5$이다.

즉, $(5,2),(2,5)$를 지나는 일차함수 이므로 $f(x)=-x+7$이다.

$f(-6)=13$이므로

$\therefore\ a=-6$

9. 정답: ③

풀이)

$F'(x)=f(x)=x^2(x-2)$이므로 $x=2$에서 극솟값이자 최솟값을 갖는다. $x=3$에서 최댓값을 갖는다.

최솟값:$m=F(2)=\int_0^2 x^3-2x^2dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=-\frac{4}{3}$

최댓값:$M=F(3)=\int_0^3 x^3-2x^2dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^3=\frac{9}{4}$

$\therefore\ Mm=-3$

10. 정답: ②

풀이)

ㄱ. $0<t<2$에서 속도가 증가한다. (속도가 $v(t)=t$이므로 구간내에서 증가한다.) (참)

ㄴ. $t=2$에서 운동방향이 바뀐다.

(운동방향이 바뀔려면 $v(t)=0$이 되면서 속도에 대한 부호가 바뀌어야 한다.) (거짓)

참고 속도가 줄어든것뿐 운동방향이 바뀐것이 아니다.

ㄷ. $t=3$에서 가속도가 0이다. (속도에 대한 그래프가 $t=3$에서 기울기값이 0이 되므로 가속도가 0이다.) (참)

11. 정답: ④

풀이)

$\log_a 16=4\log_a 2=\frac{1}{3}$이므로 $\log_a 2=\frac{1}{12}$, $\log_2 a=12$이다.

$\log_8 b=\frac{1}{3}\log_2 b=\frac{4}{9}$이므로 $\log_2 b=\frac{4}{3}$, $\log_b 2=\frac{3}{4}$이다.

$\therefore\ \log_{\sqrt{b}}a^2=4\log_b a=4\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=36$

12. 정답: ②

풀이)

두함수의 교점은 $-x^2+2x+3=x+2$의 근이다.

즉, $x^2-x-1=0$의 두근을 근의 공식을 이용하여 구하면

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

$P\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, $Q\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$이다.

두 점사이의 거리$l=\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\sqrt{10}$

별해)

두함수의 교점은 $-x^2+2x+3=x+2$의 근이다.

즉, $x^2-x-1=0$의 두근을 α,β라 하면

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$이다. 두 점 사이의 거리 $l=\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{10}$

13. 정답: ③

풀이)

$f(x)=2x^2-4ax+2a$를 미분또는 완전제곱식을 이용하면 이차함수의 축이 $x=a$이라는것을 알수 있다.

$i)$ $a<0$

이 조건이면 $x=0$에서 최솟값을 갖는다. $f(0)=2a=-12$이므로 $a=-6$

$ii)$ $0\le a\le 2$

이 조건이면 $x=a$에서 최솟값을 갖는다. $f(a)=-2a^2+2a=-12$이므로 $a=3,-2$로 나오지만 a조건을 만족하지 않으므로 모순이다.

$iii)$ $a>2$

이 조건이면 $x=2$에서 최솟값을 갖는다. $f(2)=8-6a=-12$ $a=\dfrac{10}{3}$

만족하는 a값들의 합은 $-\dfrac{8}{3}$이다.

14. 정답: ①

풀이)

두 점을 $2:1$로 내분하는점은 $\left(\dfrac{2a-1}{3},-2\right)$이다.

원의 둘레 및 내부에 있을려면 $y=-2$일 때, 원위의 x좌표는 ± 3이므로

$-3\le\dfrac{2a-1}{3}\le 3 \Leftrightarrow -4\le a\le 5$이다.

15. 정답: ④

풀이)

$g(x)=\begin{cases}-|x| & ,-1<x<1\\ |x|-2 & , x\le -1, x\ge 1\end{cases}$이다.

$\int_0^2 g(x)dx = -1$이므로 (정적분이아니라 삼각형넓이를 이용하면 편하다.)

$\int_2^t g(x)dx = 1$이나오는 t의 값을 찾으면 $2+\sqrt{2}$이다. 정적분이 계산이 아닌 직각 이등변삼각형의 넓이가 1이 나와야 하므로 한변의 길이가 $\sqrt{2}$이다. 그러므로 $t = 2+\sqrt{2}$

(참고 정적분 계산이 잘못된 방법이 아니라 시간내에 풀려면 삼각형 넓이를 이용해서 풀어야만 한다.)

16. 정답: ③

풀이)

$A\cap B^C$의 모든원소의 합은 50이하의 자연수중 3의배수 합에서 12의 배수 합을 빼면 된다.

$\therefore\ 3\sum_{k=1}^{16} k - 12\sum_{k=1}^{4} k = 408 - 120 = 288$

17. 정답: ①

풀이)

$a_7^2 - a_1^2 = (a_7 + a_1)(a_7 - a_1) = (2a+18)18 = 36$이므로 $a = -8$

$\sum_{k=1}^{7} a_k = \sum_{k=1}^{7} 3k - 11 = 7$

18. 정답: ①

풀이)

$\hat{p} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$

모비율공식에 대입하면

$$\frac{2}{3} - 2.5\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{900}} \le p \le \frac{2}{3} + 2.5\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{900}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{36} \le p \le \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{36}$$

$b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{18} = \frac{2\sqrt{2}}{27}$

19. 정답: ②

풀이)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2}f\left(1+\frac{2k}{n}\right) = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)(x-1)dx \quad \left(\because 1+\frac{2k}{n} = x,\ \frac{2}{n} = dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 x^3 - x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{17}{3}$$

20. 정답: ④

풀이)

$\{a_n\} = 4, 6, 4, 6, 4, 6, \cdots \quad (\therefore a_{2n} = 6, a_{2n-1} = 4)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{2n-1}}{2^{2n-1}} + \frac{a_{2n}}{3^{2n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{2^{2n-1}} + \frac{6}{3^{2n}}\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{8}{3} + \frac{3}{4} = \frac{41}{12}$$

$\therefore p + q = 53$