번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
정답	①	②	②	④	④	①	③	①	③	④	①	④	④	②	②	①	③	②	③	③

해설

1.

$x^3+ax^2+bx-2=(x-2)(x+1)^2=x^3-3x-2$

$a=0,\ b=-3,\ c=-2$

(상수항이 -2임에 주목한다.)

답: ①

2.

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=(x^4-1)(x^4+1)$

$=x^8-1$

$x^8=100$이므로 $\therefore 100-1=99$

답: ②

3.

$f(x)$에서 $f(\frac{2}{3})=r$

$xf(x)$에서 $\frac{2}{3}f(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}r$

답: ②

4.

두 근이 모두 자연수를 만족시킬 때, 두 근을 α, β라 할 때, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=a$이고, $\alpha\beta=12$이다. 이를 만족시키는 순서쌍 $(\alpha,\beta)=(1,12)$, $(2,6)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(6,2)$, $(12,1)$이고 따라서 가능한 a의 값은 13, 8, 7 이다.

$\therefore 28$

답: ④

5.

$z=\dfrac{2i}{1+i}=i+1,\ z^2=(i+1)^2=2i$

$z^3-z^2+4=z^2(z-1)+4=2i\times i+4$

$=-2+4$

$=2$

답: ④

6.

$f(x)=-x^2+6x+a=-(x-3)^2+a+9$

따라서, $x=3$일 때, 최댓값 12를 가지고, $12=a+9,\ a=3$

-1과 7일 때, 최솟값을 가지므로

$-(-1-3)^2+12=-(7-3)^2+12=-4$

답: ①

7.

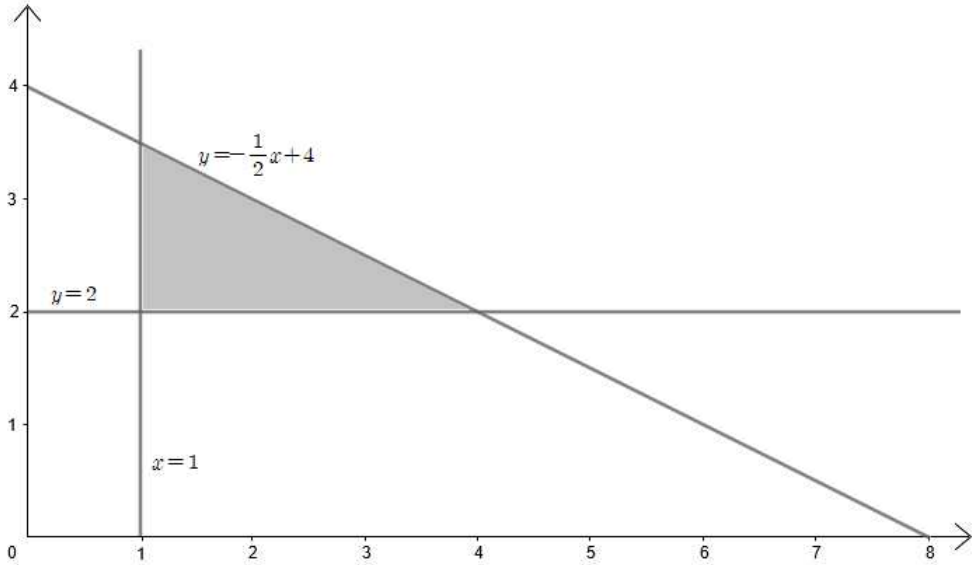
선분$\overline{CP}$와 선분$\overline{CQ}$는 각각 기울기가 $\dfrac{3-(-1)}{3-2}$, $\dfrac{-2-(-1)}{6-2}$이고, 둘의 기울기의 곱은 $4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-1$이다. 따라서 선분$\overline{CP}$와 선분$\overline{CQ}$는 수직이고 $\overline{CP}=\overline{CQ}=\sqrt{17}$이고, 이는 P에서의 접선과 Q에서의 접선의 교점 R에서 $\square CQRP$가 정사각형임을 의미한다.

따라서 $\sqrt{17}\times\sqrt{17}=17$

답: ③

8.

세 부등식 $x\geq 1,\ y\geq 2,\ y\leq -\dfrac{1}{2}x+4$이 나타내는 도형을 그리면



이때, $\frac{y-1}{x}=k$라 하면 $y=kx+1$이고 k의 값이 최대가 되기 위해선 $x=1$과 $y=-\frac{1}{2}x+4$의 교점을 지나야 한다.

교점의 좌표를 구하면 $(1,\frac{7}{2})$이고 이를 $y=kx+1$에 대입하면 $k=\frac{5}{2}$

즉, k는 $\frac{5}{2}$일 때, 최대를 가진다.

$\therefore \frac{5}{2}$

답: ①

9.

16의 네제곱근을 x라 할 때, $x^4=16$이고 이를 $x^4-16=0$으로 정리해 인수분해 하면 $(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$, $x^2+4=0$의 x는 허근을 가지므로 실수인 근의 개수는 2개이다. $\rightarrow a=2$

-8의 세제곱근을 y라 할 때, $y^3=-8$이고 이를 $y^3+8=0$으로 정리해 인수분해 하면 $(y+2)(y^2-2y+4)=0$이고, $y^2-2y+4=0$에서 (판별식) $D=(-1)^2-4<0$ 이므로 실근은 -2 하나뿐이다. $\rightarrow b=1$

$a+b=3$

답: ③

10.

$\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2} = \log_3 5 \times \log_2 3 = ab$로 나타낼 수 있고

위 식으로부터 $\log_{20} 30 = \dfrac{\log_2 30}{\log_2 20} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2\log_2 2 + \log_2 5}$

$\log_{20} 30 = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2\log_2 2 + \log_2 5}$이므로 이를 정리하면

$\log_{20} 30 = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2\log_2 2 + \log_2 5} = \dfrac{1 + a + ab}{2 + ab}$

답: ④

11.

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - n a_n$에서 n에 $n=1$을 대입하면 $a_1 = \dfrac{1}{2}$을 구할 수 있다.

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = -(n+1)a_{n+1} + n a_n$ 에서

$a_{n+1} = -(n+1)a_{n+1} + n a_n$, 따라서 $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n$이다.

$1 \sim n-1$을 n에 대입하고

$a_2 = \dfrac{1}{3} a_1$

$a_3 = \dfrac{2}{4} a_2$

$\vdots$

$a_n = \dfrac{n-1}{n+1} a_{n-1}$ 이 식을 곱하여 정리하면

$a_n = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \cdots \times \dfrac{n-1}{n+1} \times a_1 = \dfrac{2}{n(n+1)} \times \dfrac{1}{2}$

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right) = 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$

답: ①

12.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n a_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}\right)$은 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(n a_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}\right)$의 값은 0이다.

$n a_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}=b_n$으로 치환하면 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이고 $a_n=\frac{1}{n}\left(b_n-\frac{3n^2-2}{2n+1}\right)$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(b_n-\frac{3n^2-2}{2n+1}\right)=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left({a_n}^2-a_n+1\right)=\lim_{n\to\infty}{a_n}^2-\lim_{n\to\infty}a_n+1=(-\frac{3}{2})^2-(-\frac{3}{2})+1=\frac{19}{4}$$

답: ④

13.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=4$에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$은 극한값을 가지므로 $f(x)$은 x^2을 인수로 가진다.

마찬가지로 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-8$에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$은 극한값을 가지므로 $f(x)$은 $x-2$을 인수로 가진다.

$f(x)$은 삼차함수 이므로 $f(x)=ax^2(x-2)$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=4$에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2(x-2)}{x^2}=-2a=4$이므로 a의 값은 -2이다.

$f(x)=-2x^2(x-2)$, $f(-2)=-2\cdot(-2)^2(-4)=32$

답: ④

14.

$f(x)=-x^2+2f'(1)x+5$의 양변을 미분하면

$f'(x)=-2x+2f'(1)$,

x에 1을 대입하면 $f'(1)=-2+2f'(1)$, $f'(1)=2$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+5$이고, $f(1)=8$

답: ②

15.

$f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx & (x\geq 0)\\ -x^3-ax^2-bx & (x<0)\end{cases}$

으로 나타낼 수 있다. $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $f(1)=-1$이고 $f'(1)=0$이다.

$1+a+b=-1$ … ①

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ ($x\geq 0$) 이므로 $3+2a+b=0$ … ②

①과 ②을 연립하면 $a=-1,\ b=-1$

따라서 $f(x)=-x^3+x^2+x$ ($x<0$) 이고

$f'(x)=-3x^2+2x+1$ ($x<0$)에서 $\lim_{x\to-\frac{1}{3}-} f'(x)<0<\lim_{x\to-\frac{1}{3}+} f'(x)$ 이므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$f(-\frac{1}{3})=-\frac{5}{27}$이고 따라서 다른 극솟값은 $-\frac{5}{27}$이다.

답: ②

16.

풀이 1

$f(x)$은 원점에 대칭이고, $g(x)$은 y축에 대칭이므로

$\int_{-2}^{0} f(x)dx=-\int_{0}^{2} f(x)dx,\ \int_{-2}^{0} g(x)dx=\int_{0}^{2} g(x)dx$ 이므로

$\int_{-2}^{0}\{f(x)+g(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{-2}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx-\int_{0}^{2} g(x)dx$

$=\int_{-2}^{2} f(x)dx+(\int_{-2}^{0} g(x)dx-\int_{0}^{2} g(x)dx)=0+0=0$

풀이 2

$f(x)+g(x)=x^3+x^2+6x+4,\ f(x)-g(x)=x^3-x^2+6x-4$

$\int_{-2}^{0}\{f(x)+g(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 + 6x + 4)\,dx + \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 + 6x - 4)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 4x\right]_{0}^{2}$$

$$= (-4 + \frac{8}{3} - 12 + 8) + (4 - \frac{8}{3} + 12 - 8) = 0$$

답: ①

17.

$\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^4 + ax^3 - 2ax$

x에 1을 대입하면 $0 = 1 + a - 2a,\ a = 1$

따라서 $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^4 + x^3 - 2x$

양변을 x에 대해 미분하면 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$

$f(2) = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 = 42$

답: ③

18.

$(ax^2 + \frac{1}{x})^5 = \sum_{n=0}^{5} {}_5C_n (ax^2)^n (\frac{1}{x})^{5-n}$

${}_5C_n (ax^2)^n (\frac{1}{x})^{5-n} = {}_5C_n a^n x^{2n} x^{-(5-n)} = {}_5C_n a^n x^{3n-5}$

$3n - 5 = 4$이므로 $n = 3$

$\rightarrow {}_5C_2 (ax^2)^3 (\frac{1}{x})^2 = 10a^3 x^4$

따라서 $10a^3 = 80$이고 $a = 2$이다.

답: ②

19.

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나올 수 있는 순서쌍 (a,b)에서 $ax+b=0$의 해가 -1 또는 -2일 때를 구하면 된다.
즉, $a=b$ 또는 $2a=b$에서 가능한 순서쌍은 (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (4,2), (6,3)으로 9개이다.

전체 경우의 수는 36가지 이므로 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

답: ③

20.

모집단이 정규분포를 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(170,\frac{20^2}{100})$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-170}{\frac{20}{10}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 175)=P(Z\geq \frac{175-170}{2})=P(Z\geq 2.5)=\frac{1}{2}-P(0\leq Z<2.5)=0.0062$

이다.

답: ③