

2013학년도 4월 고3 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	①	2	⑤	3	④	4	③	5	①
6	④	7	③	8	②	9	④	10	②
11	①	12	③	13	③	14	②	15	⑤
16	④	17	⑤	18	②	19	①	20	③
21	①	22	17	23	50	24	8	25	15
26	30	27	48	28	16	29	100	30	37

1. [출제의도] 행렬 계산하기

$$2B = A - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 1

2. [출제의도] 삼각함수의 배각의 공식 이해하기

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{4}{5} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

따라서 $\sin 2\theta = \frac{24}{25}$

3. [출제의도] 함수의 미분계수 계산하기

$$f'(x) = e^x + 2x - 3$$

$$f'(0) = 1 + 0 - 3 = -2$$

따라서 $f'(0) = -2$

4. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

$$2f(A) + f(B) = f(2A + B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

따라서 $2f(A) + f(B) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

5. [출제의도] 함수의 극댓값, 극솟값 이해하기

$$f'(x) = 2e^x \cos x = 0 \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \text{이다.}$$

함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{3}{2}\pi$...	(2π)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↘	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	↗	

함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{\pi}{2} \text{에서 극댓값 } M = e^{\frac{\pi}{2}},$$

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{에서 극솟값 } m = -e^{\frac{3}{2}\pi} \text{을 갖는다.}$$

따라서 $Mm = -e^{2\pi}$

6. [출제의도] 일차변환과 행렬 사이의 관계 이해하기

직선 $y = x + 1$ 위의 점 (x, y) 가 일차변환에 의하여 점 (x', y') 으로 옮겨진다면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (a-3)y \\ -2x + 4y \end{pmatrix}$$

점 (x', y') 이 $y = -2x$ 위의 점이므로

$$-2x + 4y = -2x - 2(a-3)y$$

$$-2x + 4(x+1) = -2x - 2(a-3)(x+1)$$

$$(a-1)x + a - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 은 x 에 대한 항등식이므로 $a-1=0$ 이다.
따라서 $a=1$

7. [A형 12번과 동일]

8. [출제의도] 삼각방정식의 실근의 개수 구하기

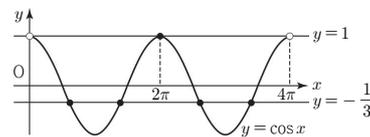
$$3(1 - \cos^2 x) + 2(1 + \cos x) - 4 = 0$$

$$3\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

$$(3\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$0 < x < 4\pi$ 에서 $y = \cos x$, $y = -\frac{1}{3}$, $y = 1$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 서로 다른 실근의 개수는 5

9. [A형 19번과 동일]

10. [출제의도] 함수의 연속성의 정의 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin 2x - a}{3x} = b \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin 2x - a) = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin 2x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{2\sin 2x}{2x} \right) = -\frac{1}{3}$$

$\therefore b = -\frac{1}{3}$
따라서 $a + b = \frac{2}{3}$

11. [A형 15번과 동일]

12. [A형 20번과 동일]

13. [출제의도] 분수함수의 정적분 이해하기

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 2 \right) dx$$

$$= \left[\ln x - 2x \right]_1^e = 3 - 2e$$

14. [출제의도] 분수방정식을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{1}{x} - 2 - \frac{a+1}{x-1} = 0$$

$$\frac{2x^2 + (a-2)x + 1}{x(x-1)} = 0$$

$$x \neq 1, 2x^2 + (a-2)x + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

i) $\textcircled{1}$ 이 무연근 1을 가질 때,
 $a = -1, x = \frac{1}{2}$

ii) $\textcircled{1}$ 이 무연근 1을 갖지 않을 때,
 $\textcircled{1}$ 의 판별식 $D = a^2 - 4a - 4$ 에 대하여

$\textcircled{1} D > 0$ 인 경우
 $a < 2 - 2\sqrt{2}$ ($a \neq -1$)일 때
1이 아닌 양의 실근 2개,
 $a > 2 + 2\sqrt{2}$ 일 때 음의 실근 2개

$\textcircled{2} D = 0$ 인 경우
 $a = 2 + 2\sqrt{2}$ 일 때
 $(\sqrt{2}x + 1)^2 = 0$ 에서 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$a = 2 - 2\sqrt{2}$ 일 때
 $(\sqrt{2}x - 1)^2 = 0$ 에서 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\textcircled{3} D < 0$ 인 경우 실근을 갖지 않는다.
i), ii)에 의하여 $a = -1$ 또는 $a = 2 - 2\sqrt{2}$
따라서 a 의 값의 합은 $1 - 2\sqrt{2}$

15. [출제의도] 함수의 연속성의 정의를 활용하여 추론하기

\neg . $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0$ 이고
 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -1-0} f(t) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \{f(x) + f(-x)\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+0} f(-x) = 0$ (참)

$\therefore -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ($x \neq 0$)이고 $f(x) \geq 0$ 이므로
 $-f(x) \leq f(x) \sin \frac{1}{x} \leq f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin \frac{1}{x} = 0$ (참)

\therefore 함수 $(g \circ f)(x)$ 가 열린 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이려면 $x = -1, x = 1$ 에서 연속이려면 된다.

i) $x = 1$ 인 경우
 $(g \circ f)(1) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1+0} (g \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow +0} g(t) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1-0} (g \circ f)(x) = \lim_{t \rightarrow -1-0} g(t) = 0$
 $\therefore x = 1$ 에서 연속

ii) $x = -1$ 인 경우 i)과 같은 방법으로 연속
i), ii)에 의하여 열린 구간 $(-2, 2)$ 에서 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 연속이다. (참)
따라서 옳은 것은 $\neg, \text{나}, \text{다}$

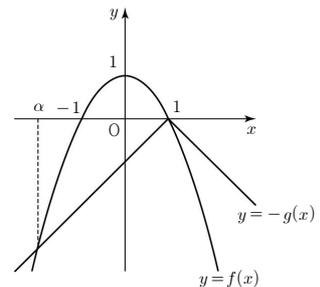
16. [A형 18번과 동일]

17. [A형 16번과 동일]

18. [출제의도] 무리방정식 이해하기

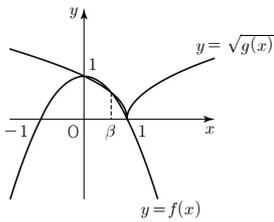
$$\{f(x) - \sqrt{g(x)}\} \{f(x) + g(x)\} = 0,$$

$f(x) \neq g(x)$ 이므로
i) $f(x) = -g(x)$ 인 경우
 $x = \alpha$ ($\because x = 1$ 은 무연근)



ii) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ 인 경우

$x = \beta$ ($\because x=0, x=1$ 은 무연근)



i), ii)에 의하여 실근은 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 따라서 실근의 개수는 2

19. [출제의도] 수열의 극한값 추론하기

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 2(1-x) dx + \int_1^2 2(x-1) dx = 2$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx = \dots = \int_{2(k-1)}^{2k} f(x) dx = 2$$

이므로 $\int_0^{2k} f(x) dx = 2k$ (k 는 자연수)

$$g(k) = \int_{2k}^{4k} f(x) dx = \int_0^{4k} f(x) dx - \int_0^{2k} f(x) dx = 4k - 2k = 2k$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n g(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$$

20. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = 1$ 이므로

$$g(0) = \int_{-1}^0 e^t f(t) dt = \int_{-1}^0 e^t dt = [e^t]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e} \quad (\text{참})$$

ㄴ. $g'(x) = e^x f(x) = 0$ 이면 $f(x) = 0$ 이므로 $x = 1$ 함수 $g(x)$ 의 증가표는 다음과 같다.

x	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	$e - 1 - \frac{1}{e}$	↘

$\therefore g(x)$ 는 극댓값 $e - 1 - \frac{1}{e}$ 을 갖는다. (거짓)

ㄷ. ㄴ의 증가표에 의하여 $g(x) = 0$ 은 많아야 2개의 실근을 갖는다.

i) $g(-1) = 0$ 이므로 한 실근을 갖는다.

ii) $g(1) = e - 1 - \frac{1}{e} > 0$, $g(2) = -1 - \frac{1}{e} < 0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 열린 구간 (1, 2)에서 적어도 한 실근을 갖는다.

i), ii)에 의하여 $g(x) = 0$ 의 실근의 개수는 2 (참) 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 미분법을 활용하여 문제해결하기

$BQ = x$, $AQ = y$ 라 하면

$$\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} = 20 \quad \dots \text{㉠}$$

㉠의 양변을 시간 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+9}} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$y = 4$ 일 때 $x = 6\sqrt{6}$ 이고, $\frac{dy}{dt} = 1$ 이므로

$$\frac{6\sqrt{6}}{15} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{4}{5} = 0 \text{ 에서 } \frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 구하는 변화율은 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

22. [출제의도] 로그부등식의 정의 이해하기

$\log_2(x-1) < \log_2(7-x)$ 에서

로그의 정의에 의하여 $1 < x < 7 \quad \dots \text{㉠}$

$x-1 < 7-x$ 에서 $x < 4 \quad \dots \text{㉡}$

㉠, ㉡에서 $1 < x < 4$ 이므로 $\alpha = 1$, $\beta = 4$ 따라서 $\alpha^2 + \beta^2 = 17$

23. [출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$|a+2 \times 2-1| = |a+5 \times 2-3|$$

$$|a+3| = |a+7| \quad \text{이므로 } a = -5$$

$$a_n = 2n - 7 > 92 \quad \therefore n > 49.5$$

따라서 n 의 최솟값은 50

24. [출제의도] 분수부등식을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{4}{v} - \frac{4}{v+2} \geq \frac{1}{10} \quad (v > 0)$$

$$\frac{-40(v+2) + 40v + v(v+2)}{10v(v+2)} \leq 0$$

$$10v(v+2)(v+10)(v-8) \leq 0$$

$v > 0$ 이므로 $0 < v \leq 8$

따라서 v 의 최댓값은 8

25. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$\frac{1}{2} \times 30 \sin \theta \times 30 \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times (30 + 30 \sin \theta + 30 \cos \theta) \times r(\theta)$$

$$r(\theta) = \frac{30 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta + 1}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{r(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{30 \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta + 1} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \right) = 15$$

26. [출제의도] 일차변환을 나타내는 행렬 이해하기

일차변환 $(f \circ g)^{-1}$ 의 역변환이 $f \circ g$ 이므로

일차변환 $f \circ g$ 에 의하여 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 이

점 $(5, 5\sqrt{3})$ 으로 옮겨진다.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

점 $(\sqrt{3}, 1)$ 을 원점을 중심으로 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 만큼

회전변환시킨 점을 다시 원점을 닮음의 중심으로

하고 닮음비가 $k=5$ 인 닮음변환에 의하여 옮긴 점이

$(5, 5\sqrt{3})$ 이다.

따라서 $\frac{k\pi}{\theta} = 30$

27. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

$$\overline{OA} = 4, \overline{AD} = 4 \tan \frac{\theta}{2} \text{ 이므로}$$

$$\square OADB = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AD} = 16 \tan \frac{\theta}{2} = 8 \text{ 에서}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \square OAEC = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= 16 \times \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\theta}{2}} = 16 \times \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 48$$

28. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제해결하기

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 8(x > 0) \text{이라 하자.}$$

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2$$

$$f''(x) = 6x^2 - 12x = 0 \text{ 에서 } x = 2 (\because x > 0)$$

$f'(x)$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값을 갖는다.

$f(2) = 0$, $f'(2) = -8$ 이므로 점 $(2, 0)$ 에서의

접선의 방정식은 $y = -8x + 16$

따라서 구하는 도형의 넓이는 16

29. [출제의도] 정적분과 무한급수의 관계 이해하기

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{k}{n} - \frac{1}{2} \times \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \right) = 1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) = \int_0^1 \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

따라서 $150\alpha = 100$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x) = k$ 인 x 에서 $f'(x) = 0$ 이어야 한다.

$f'(x) = 0$ 의 해가 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이므로

$$k = f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$0 < k < 6\pi$ 이므로

$$k = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } k = \frac{11}{4}\pi \text{ 또는 } k = \frac{19}{4}\pi$$

$\therefore k$ 의 값의 합은 $\frac{33}{4}\pi$ 이므로 $p=4$, $q=33$

따라서 $p+q=37$