

7.27 국가직 공무원시험(9급) 수학 정답 및 해설

- 남부고시 유상현 수학연구소 -

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A + X = AB$ 를 만족시키는 행렬 X 는?

- ① $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

[해설] “수1” 행렬의 사칙연산

$$X = AB - A = A(B - E) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

정답 : ③

2. 다항식 $(3x-2)^4$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?

- ① -216 ② -108 ③ 108 ④ 216

[해설] “미통기” 이항정리를 이용한 계수 구하기

$${}_4C_2 (3x)^2 \cdot (-2)^2 = 216x^2$$

정답 : ④

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이고 $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[해설] “고등수학” 삼각 방정식의 풀이

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = 2 + \sqrt{3}$$

$$1 - \tan\theta = (2 + \sqrt{3})(1 + \tan\theta)$$

$$1 - \tan\theta = (2 + \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})\tan\theta$$

$$-(1 + \sqrt{3}) = (3 + \sqrt{3})\tan\theta$$

$$\tan\theta = \frac{-(1 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{6}\pi \quad (\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$$

$$\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$$

정답 : ①

4. 방정식 $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $3^{2\alpha} + 3^{2\beta}$ 의 값은?

- ① 13 ② 26 ③ 39 ④ 52

[해설] “수1” 지수방정식

$3^x = t$ 라 치환하면,

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$(t-1)(t-5) = 0$$

$$t = 1, 5$$

$$\therefore 3^\alpha = 1, 3^\beta = 5$$

$$3^{2\alpha} + 3^{2\beta} = (3^\alpha)^2 + (3^\beta)^2 = 1 + 25 = 26$$

정답 : ②

5. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} (x^3 - 2x^2 + 3) dx$ 의 값은?

- ① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5

[해설] “미통기” 미분의 정의, 적분의 혼합된 형태

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ 이라 하고, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} (x^3 - 2x^2 + 3) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(x) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = F'(1) = f(1)$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

정답 : ③

6. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선이 곡선 $y=x^2+ax+2$ 에 접하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

[해설] “미통기+고등수학” 미분계수를 이용하여 접선구하기, 고등수학 직선과 이차함수가 접하는 조건

$y=x^3$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기(미분계수)는 3이고, (1, 1)을 지나므로 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+1=3x-2$

이 직선이 곡선 $y=x^2+ax+2$ 에 접해야 하므로 연립방정식의 해는 1개 즉, 판별식 $D=0$ 이 되어야 한다.

$$x^2+ax+2=3x-2$$

$$x^2+(a-3)x+4=0$$

$$D=(a-3)^2-16=a^2-6a-7=0$$

이를 만족시키는 모든 a의 값의 합은 6 (근과 계수와의 관계)

정답 : ④

7. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+n+1}$ 의 소수부분을 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$

[해설] “수1” 수열의 극한

$$\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+n+1} < \sqrt{n^2+2n+1}$$

$$n < \sqrt{n^2+n+1} < n+1$$

$\sqrt{n^2+n+1}$ 의 정수부분은 n이다.

따라서 $\sqrt{n^2+n+1}$ 의 소수부분 $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n+1} - n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + n} \quad (\text{분모 분자를 } n \text{으로 나누면})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

정답 : ②

8. x 에 대한 이차방정식 $4x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 일 때, k 의 값은?

- ① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$

[해설] “고등수학” 근과 계수와의 관계, 삼각함수

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \cdots (a)$$

$$\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{k}{4} \quad \cdots (b)$$

(a) 식의 양변을 제곱하면

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$2\sin\theta \cos\theta = -\frac{3}{4} \quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$\sin\theta \cdot \cos\theta = -\frac{3}{8}$$

$$\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{k}{4} \text{ 라 하였으므로}$$

$$-\frac{3}{8} = \frac{k}{4}$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2}$$

정답 : ④

9. 양의 실수 x, y, z 가 비례식 $(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5$ 를 만족할 때, $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{14}$ ② $\frac{11}{14}$ ③ $\frac{13}{14}$ ④ $\frac{15}{14}$

[해설] “고등수학” 비례식

$$x+y=3k$$

$$y+z=4k$$

$$z+x=5k$$

양변을 다 더하면,

$$2(x+y+z)=12k$$

$$x+y+z=6k$$

$$\text{따라서 } x=2k, y=k, z=3k$$

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2k^2+3k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2} = \frac{11k^2}{14k^2} = \frac{11}{14}$$

정답 : ②

10. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = \log(n+3)(n+4)$ 를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{29} a_{2k} = \log \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로 소인 자연수이다.)

- ① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33

[해설] “수1” 수열의 합 + 로그의 합의 성질

$S_n = \log(n+3)(n+4)$ 이라 하면,

$$S_1 = a_1 = \log 20$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log(n+3)(n+4) - \log(n+2)(n+3) \\ &= \log \frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \log \frac{n+4}{n+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{29} a_{2k} &= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{58} \\ &= \log \frac{6}{4} + \log \frac{8}{6} + \log \frac{10}{8} + \cdots + \frac{\log 62}{60} \\ &= \log \frac{62}{4} = \log \frac{31}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore p+q=33$$

정답 : ④

11. 집합 $A = \{-1, 1, i, -i\}$ 가 사칙연산 중 닫혀있는 것만을 있는 대로 나열한 것은? (단, $i^2 = -1$ 이다.)

- ① 덧셈, 나눗셈 ② 뺄셈, 곱셈 ③ 곱셈, 나눗셈 ④ 뺄셈, 나눗셈

[해설] “고등수학” 닫혀있는 집합

$1+(-1)=0$ 이므로 덧셈에 닫혀있지 않다.

$1-(-1)=2$ 이므로 뺄셈에 닫혀있지 않다.

정답 : ③

12. 서로 다른 두 이차방정식 $x^2+kx+5=0$, $x^2+5x+k=0$ 이 오직 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, 상수 k 와 근 α 의 합 $k+\alpha$ 의 값은?

- ① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3

[해설] “고등수학” 이차방정식

α 가 두 방정식의 근이므로 대입하면,

$$\alpha^2+k\alpha+5=0$$

$$\alpha^2+5\alpha+k=0$$

위의 식에서 아래식을 빼고 정리하면,

$$(k-5)\alpha+(5-k)=0$$

$$(k-5)(\alpha-1)=0$$

$k=5$ 라면 두 방정식이 일치하여 무수히 많은 해를 가지게 되므로 조건에 맞지 않으므로 $\alpha=1$ 이다.

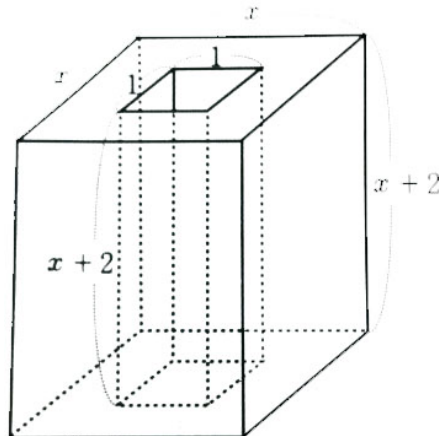
$\alpha=1$ 를 위의 식에 대입하면

$$k=-6$$

$$\therefore 1-6=-5$$

정답 : ③

13. 가로 세로 높이가 각각, x , x , $x+2$ 인 직육면체에 그림과 같이 가로, 세로, 높이가 각각 1, 1, $x+2$ 인 직육면체 모양으로 구멍을 뚫었다. 남은 부분의 부피가 40이 될 때, x 의 값은?



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6

[해설] “고등수학” 고차방정식의 풀이

남은 부분의 부피 = 큰 직육면체의 부피 - 작은 직육면체의 부피

$$40 = x^2(x+2) - (x+2)$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x-3)(x^2+5x+14)=0$$

$$\therefore x=3$$

정답 : ①

14. $\log 3250$ 의 지표를 n , $\log 0.00325$ 의 가수를 a 라 할 때, n 과 a 의 곱 na 의 값은? (단, $\log 3.25 = 0.5119$ 로 계산한다.)

- ① 0.5119 ② 1.5357 ③ 2.0476 ④ 2.5595

[해설] “수학1” 상용로그의 성질

3250 이 4자리의 수이므로 지표는 3

$$\log 0.00325 = \log \frac{3.25}{1000} = -3 + \log 3.25$$

따라서 $\log 0.00325$ 의 가수 $a = \log 3.25 = 0.5119$

$$na = 3 \times 0.5119 = 1.5357$$

정답 : ②

15. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n + 1}$ 에 대하여 $f(9) + f(\frac{1}{9})$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11

[해설] “수1” 무한등비수열의 극한

$$f(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ -1 & (|x| < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

따라서 $f(9) + f(\frac{1}{9}) = 9 - 1 = 8$

정답 : ①

16. 다항식 $P(x)$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

- (가) $P(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나머지가 $2x-1$ 이다.
 (나) $P(x)$ 를 $(x+1)$ 로 나누면 나머지가 3 이다.

$P(x)$ 를 $(x-1)^2(x+1)$ 로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(3)$ 의 값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13

[해설] “고등수학” 나머지 정리

$P(x) = (x-1)^2(x+1)Q(x) + R(x)$ 로 두고,

(가)에 의해 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나머지가 $2x-1$ 이 되어야 하므로

$R(x) = a(x-1)^2 + 2x-1$ 라 할 수 있다.

(나)에 의해 $P(-1) = 3 = R(-1)$ 을 위의 식에 대입하면

$$3 = R(-1) = a(-2)^2 - 2 - 1$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 $R(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2x-1$ 가 된다.

$$R(3) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 3 - 1 = 11$$

정답 : ②

17. 좌표평면 위의 두 점 $A(3, 1)$, $B(-1, -2)$ 를 지나는 직선과 원점 $O(0, 0)$ 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{5}$

[해설] “고등수학” 점과 직선사이의 거리

$$AB \text{를 지나는 직선의 기울기} = \frac{1 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$$

따라서 AB 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}(x-3) + 1$$

정리하면, $3x - 4y - 5 = 0$

$$\text{원점과 직선까지의 거리} = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

정답 : ①

18. 어느 학교 전체 학생의 수학 점수는 평균이 50점, 표준편차가 4점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 학생의 수학 점수가 46점 이상 58점 이하일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 값은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.8185 ② 0.7745 ③ 0.6587 ④ 0.3413

[해설] “미통기” 표준정규분포를 이용한 확률 구하기

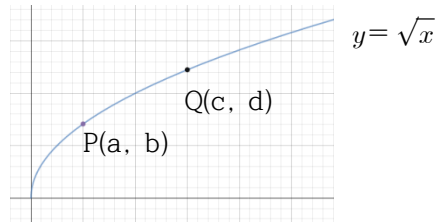
$N(50, 4^2)$ 을 따르는 X 에 대하여

$$P(46 \leq X \leq 58) = P\left(\frac{46-50}{4} \leq Z \leq \frac{58-50}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2)$$

$$P(-1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

정답 : ①

19. 그림과 같이 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 에 대하여 $b+d=2$ 일 때, 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 기울기는? (단, $0 < a < c$)



- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$

[해설] “고등수학” 직선의 방정식, 무리함수

$P(a, b)$, $Q(c, d)$ 이 $y = \sqrt{x}$ 위의 점이므로 대입 하면,

$$b = \sqrt{a}, d = \sqrt{c}$$

$$b^2 = a, d^2 = c$$

임을 알 수 있다.

$$PQ \text{를 지나는 직선의 기울기} = \frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b}$$

정답 : ④

20. 두 일차함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=x-3$ 에 대하여 $(g \circ f)(1)=-1$ 이고 $(g^{-1} \circ f)(-1)=3$ 일 때, 두 상수 a , b 의 곱 ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2

[해설] “고등수학” 합성함수와 역함수

$g(x)$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 를 구해보면,

$$g^{-1}(x)=x+3$$

$$(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(a+b)=a+b-3=-1$$

$$(g^{-1} \circ f)(-1)=g^{-1}(-a+b)=-a+b+3=3$$

두 식을 연립하면, $b=1$, $a=1$

$$\therefore ab=1$$

정답 : ③